メカニズム・デザイン: レクチャー・ノート*

三原麗珠†
reiju@ec.kagawa-u.ac.jp (H. Reiju Mihara)
香川大学経済学部

1999 年 8 月のバージョン

目 次

---

*このノートの dvi file および pdf file は，三原麗珠の Web page にて入手できます. pLaTeX 2_ε input files が欲しい方はご連絡ください.

†http://www.ec.kagawa-u.ac.jp/~reiju/

メカニズム・デザイン (mechanism design)，あるいは**遂行理論** (implementaton theory)，は選挙制度・契約・オークション・官僚組織の意思決定システム・公共財の供給方法，などを比較・設計することを目的とする，応用範囲の広い経済理論である.「どのようにメカニズム（契約や法制度などのルール）を定めれば，ひとびとの希望を尊重しつつ社会的に望ましい状態を達成できるか？」といった問題をあつかう．ひとびとは通常自分に不利になる情報を提供したがらないので，単に希望を聞くだけではダメである

このノートは，Moore [1] の概説にほぼしたがう．Part one では，旧約聖書のソロモンの判決を例にとって，いくつかの〈遂行 (implementation)〉概念を説明する．Part two では，この分野の最近の数理的な研究をもっとフォーマルに概観する．なお Moore の概説はエージェント (人々) が互いに選好を知っているケース (完備情報のケース) をあつかっている．

PART ONE

まずは**遂行理論** (implementation theory) が出現した古い例:

例. 〈**ソロモンの判決** (The Judgment of Solomon)〉女性 1 と女性 2 がともにある赤ん坊を自分の子供であると主張している．どちらもそれを立証することはできない．王ソロモンは「その子供をふたつに切り裂いて半分ずつ渡す」と脅しをかける.（おいおい，この国の法律はどうなってるの？）本当の母親ならその子供を切り裂かれるよりは相手に渡したほうがよいと思い，偽の母親なら相手に渡すよりは切り裂かれる方がよいと思うだろうと判断してのことである.（この判断は正しいと仮定.）じっさい二人の女性はソロモンの思惑どおりに訴えたため，賢者ソロモンは本当の母親に赤ん坊を渡すことができた．旧約聖書列王紀上 (Old Testament, the First Book of Kings) 第 3 章 16–28． ‖

1950–60 年代に Hurwicz がメカニズム (経済活動の前提となる機構とか制度とか) を変数と考え，経済環境 (テクノロジーや人々の選好や初期保有) をパラメータと考える見方を提唱．Hurwicz は現代遂行理論の父といえる．

それ以前の貢献:

- 市場社会主義の実行可能性にかんする 1930–40 年代の論争.
- Hayek の 1945 年「社会における知識の利用」論文.

初期の遂行理論は社会全体にかかわる「大きな」問題を対象にしていた:

- 価格メカニズムに替わるメカニズムで，効率性だけでなく公平さを達成するものはないか?

- 価格メカニズムがうまく働かない環境 (市場の失敗が起きるような環境) でもうまく働くべつのメカニズムはないか?
- ひとびとの**戦略的操作** (strategic manipulation) (ルールを知った人々が，自分に有利な結果を導こうとして自分の持つ情報を意図的に歪めて伝える行動) に耐えられるようなメカニズムはないか?

最近の遂行理論はもっと小さい (ほんの数人だけにかかわるような) 問題にも応用されている．

潜在的な応用範囲は広い: 公共財の供給，課税，オークションの設計，独占企業の価格付け，投票理論，定款 (憲法) の設計と政治学全般，交渉，エージェンシー理論，契約，機構の理論．

1 ソロモンの判決の定式化

〈遂行〉とはいったい何か? ソロモン王の判決のジレンマ (窮地) をまず考える．

ソロモン王の判決に出てきた偽の母親の行動は単純すぎないか? それにもし女性が 2 人とも「その子供を切り裂かれるよりは相手に渡したほうがましだ」と訴えた場合はどうなっていたのだろうか?

このセクションではとりあえず問題を定式化する:

- 個人 (individuals)，あるいは**エージェント** (agents)，は 2 人の女性．仮にアンナ (Anna) とベス (Bess) と呼ぶことにする．
- 2 つの**状態** (states)，あるいは自然の状態 (states of nature)，がありうる:

  α: アンナが本当の母親である場合，

  β: ベスが本当の母親である場合．
- ソロモンは**プランナー** (planner) あるいは計画者と呼ばれる．
- ソロモンの選べる結果，あるいは可能な**アウトカム** (outcomes)，は次の最初の 3 つ:

  a: その子供をアンナに渡す，

  b: その子供をベスに渡す，

  c: その子供を 2 つに切り裂く，

  d: アンナとベスとその子供を殺す．

  最後のアウトカム d は後の議論でもちいる．(c for "cut"; d for "death.")

- 4 つのアウトカムにたいするアンナとベスの**選好** (preferences) は以下の順序 (もっとも望ましいものが最初) で与えられていると仮定:
  - 状態 α のとき: アンナが $abcd$ の順; ベスが $bcad$ の順.
  - 状態 β のとき: アンナが $acbd$ の順; ベスが $bacd$ の順.
- ソロモンは以下のような選択関数 f を遂行したい:
  - $f(\alpha) = a$
  - $f(\beta) = b$.

  (ソロモンは状態 α ではアウトカム a を，状態 β ではアウトカム b を，実現したい．**目的**にあたる．) ここで**選択関数** (choice function) とは状態の集合からアウトカムの集合への関数 $f\colon \{\alpha, \beta\} \to \{a, b, c, d\}$ のことである．[1]
- ソロモンの**遂行問題** (implementation problem) とは，ある**メカニズム** g をつくって,
  - 状態 α で g がプレイされたときの均衡アウトカムが $a = f(\alpha)$ だけに,
  - 状態 β で g がプレイされたときの均衡アウトカムが $b = f(\beta)$ だけに

  なるようにすること．(目的を実現するための**方法**を探すことにあたる．) ここで**メカニズム** (mechanism) とはある集合 (エージェントに許される行動の範囲を定めた集合) からアウトカムの集合への関数である.「均衡アウトカム」という言葉の意味は後述.

以上に述べた遂行問題では，ソロモンがメカニズム g をつくるとき，真の状態を知らないことに注意．真の状態が分かったあとで，メカニズムをつくるのではない．分かる前につくる．

均衡アウトカムが一意的に決まる (たとえば a **だけ**になる) という条件は議論の余地がある.「実現したいアウトカムが均衡アウトカムのひとつになっていればいい (均衡アウトカムに実現したくないものがまじっていてもいい)」という立場もありえる．しかしこの分野の文献の多くはこの立場をとらない.

[1] 集合 A, B があたえられたとき (ここでは $A = \{\alpha, \beta\}$ は状態の集合で $B = \{a, b, c, d\}$ はアウトカムの集合になっている)，**関数** (functon, mapping, map) $f\colon A \to B$ とは集合 A のそれぞれの要素に集合 B のある要素をひとつだけ対応させる規則のこと．要素 $a \in A$ に要素 $f(a) \in B$ が対応するとき，$f\colon a \mapsto f(a)$ などと表記する．

2　予備知識と遂行理論のフレームワーク

2.1　非協力ゲーム理論の予備知識

遂行理論の一般的フレームワークを提示する前に，**非協力ゲーム理論** (non-cooperative game theory) の用語を導入する．また，つぎのセクションでは選好，効用，そして選好プロファイルという概念を導入する．

最初に，非協力ゲーム理論の分野でもっとも有名な例である**囚人のジレンマ** (The Prisoner's Dilemma) を考える.「ジレンマ」とは窮地，板挟み，困難な状況のこと．

ある犯罪の容疑者２人 (じつは共犯) が別件で逮捕された．自白を引きだすために，取り調べ人 (検事？) は２人を隔離してそれぞれの容疑者に脅し (はったり？) をかける (共犯であることは見抜いている; あとは自白が欲しい)：

- ２人とも黙秘を続ければともに 1 年の刑 (別件で)，
- １人だけが自白すれば直ちに釈放で相手は 9 年の刑,
- ２人とも自白すればともに 6 年の刑になる．

この状況を非協力ゲーム理論の言葉に直そう．(具体的なシチュエーションである上の寓話を一歩抽象化したいわけ．具体的ケースをたくさん並べることに終わっていては大学で勉強する意味が半減するでしょ?)

この**戦略ゲーム** (strategic game) の

- **プレーヤー** (players) は囚人 1 と囚人 2 で,
- それぞれのプレーヤーは〈黙秘〉と〈自白〉という２つの **戦略** (strategies) を持つ．
- ２人の戦略の組 (ペア) のおのおのにたいして，それぞれのプレーヤの**利得** (payoff) を表 (利得行列) にすれば下のようになる．たとえば戦略ペア 〈黙秘, 自白〉—つまり囚人 1 が黙秘して囚人 2 が自白する状況—での利得の組は $(-9, 0)$．(刑期をマイナスの利得とみなしている．)

		囚人 2	
		黙秘	自白
囚人 1	黙秘	$-1, -1$	$-9, 0$
	自白	$0, -9$	$-6, -6$

(後述するように，この特定の利得行列で表されたゲームはさまざまな具体的シチュエーションを抽象化している．しかしわれわれはこの行列で表された特定のゲーム以外のさまざまなゲーム (たとえば後で述べる Battle of the Sexes) をも同時に考えるための言葉が欲しい．よって抽象化をさらにすすめてみよう．そのために，以下では

ゲームを一般的に定義することにする.「ここまで極端に抽象化をする必要があるのか!」と思うかもしれないな. たしかに実社会で接するレベルの抽象度は超えている. しかしせっかく大学に来たんだから, またとない機会だと思ってついてきて欲しい. 世界の見え方が変わってくるかもしれないよ.)

戦略形ゲーム (strategic game) とは以下の要素からなる組 $(S_1, \ldots, S_I; u_1, \ldots, u_I)$ である:

- 集合 $\{1, \ldots, I\}$ (**プレーヤー** (players) の集合)
- それぞれのプレーヤー i について, 集合 S_i (プレーヤー i の**戦略集合** (set of strategies))
- それぞれのプレーヤー i について, 実数値関数 $u_i : S_1 \times \cdots \times S_I \to \mathbf{R}$ (プレーヤー i の**効用関数** (utility function), あるいは**利得関数** (payoff function)). [2]

戦略の組 (戦略プロファイル) $(s_1, \ldots, s_I)$ が選ばれたときのプレーヤー i の利得は $u_i(s_1, \ldots, s_I)$ になる. 利得関数の代わりに, 戦略集合 $S_1 \times \cdots \times S_I$ 上で定義された「選好」を考えることもある. それについては後述.

例. 囚人のジレンマでは, $S_1 = S_2 = \{\langle$黙秘$\rangle, \langle$自白$\rangle\}$. $u_1(\langle$黙秘$\rangle, \langle$自白$\rangle) = -9$ で, $u_2(\langle$黙秘$\rangle, \langle$自白$\rangle) = 0$. ‖

リマーク. 2 人のプレーヤーからなる戦略形ゲームは利得行列で表せた. いま利得行列のそれぞれの枡目に, その枡目に対応する戦略ペアが取られたときの (利得ペアのかわりに) 結果 (アウトカム) を記入する. こうやって得られる表を**ゲーム・フォーム** (ゲーム形式, game form) とか**メカニズム** (mechanism) とよぶ. たとえば 2 車線道路のある地点での対向車の運命は以下のゲーム・フォームで与えられる:

		ドライバー 2	
		左側	右側
ドライバー 1	左側	無事	衝突
	右側	衝突	無事

ゲーム・フォームの定義はあとで. ‖

囚人のジレンマの分析に戻る.「2 人の囚人は脅しを本気にして, できるだけ自分の刑期を短くしたいと考える」と仮定. つまりこのゲームを信じ, 自分の利得を最大化したいと. すると

[2] 集合 $S_1 \times \cdots \times S_I := \{(s_1, \ldots, s_I) : s_1 \in S_1, \ldots, s_I \in S_I\}$ を集合 S_1, ..., S_I の**直積** (direct product) とよぶ. この集合の要素 $(s_1, \ldots, s_I)$ を**戦略プロファイル** (strategy profile) とよぶ.

- 2 人が隔離されている状況では，合理的なプレーヤは自白を選ぶだろう．相手が黙秘しようが自白しようが，自分は自白したほうが有利 (利得が高い) だから．(**演習**: 表でチェックせよ．)
- その結果実現する戦略ペアは $\langle$自白, 自白$\rangle$ で利得のペアは $(-6, -6)$.
- ところがふたりがともに黙秘する戦略ペア $\langle$黙秘, 黙秘$\rangle$ にたいする利得ペアは $(-1, -1)$．この方がどちらのプレーヤにとってもより望ましい．(「$\langle$黙秘, 黙秘$\rangle$ は $\langle$自白, 自白$\rangle$ よりも **パレート優位** (Pareto-superior) である」という．)

協力しあえばプレーヤー全員に利益があるのに，それぞれのプレーヤーが相手に「ただ乗り (free riding)」しようとしてしまうため，その利益を実現できない．現実社会でもこの種のジレンマはいろいろある．国際紛争，ゴミ収集所の清掃，など．

囚人のジレンマでは，囚人 1 にとって $\langle$自白$\rangle$ が**支配戦略** (dominant strategy): (囚人 2 の戦略がなんであっても) 囚人 1 は $\langle$自白$\rangle$ という戦略を選ぶのが有利になっている．囚人 2 にとっても $\langle$自白$\rangle$ が支配戦略になっている．

ノーテーション (記号): i 以外のプレーヤーの戦略集合の直積 $S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_I$) を S_{-i}，その要素を s_{-i} などと書く．たとえば 4 人のばあい，$s_{-2} = (s_1, s_3, s_4)$，$(s'_2, s_{-2}) = (s_1, s'_2, s_3, s_4)$，$s^*_{-4} = (s^*_1, s^*_2, s^*_3)$.

定義. 戦略形ゲーム $(S_1, \ldots, S_I; u_1, \ldots, u_I)$ が与えられているとする．次の不等式群がみたされるとき，戦略 $s_i \in S_i$ が戦略 $s'_i \in S_i$ を**強く支配する** (strictly dominates) という: すべての $s_{-i} \in S_{-i}$ にたいして，

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}).$$

戦略 $s_i \in S_i$ が個人 i の**支配戦略** (dominant strategy) であるとは，s_i が s_i 以外のすべての戦略 $s'_i \in S_i$ を強く支配していることをいう．[文献によって少々条件がちがう．]

リマーク. 2 人ゲーム $(S_1, S_2; u_1, u_2)$ のばあい，プレーヤー 1 の戦略 $s'_1 \in S_1$ がプレーヤー 1 の戦略 $s''_1 \in S_1$ を強く支配するのはつぎの条件がみたされるとき: プレーヤー 2 のすべての戦略 $s_2 \in S_2$ にたいして，

$$u_1(s'_1, s_2) > u_1(s''_1, s_2).$$

たとえば，囚人のジレンマではプレーヤー 1 の $\langle$自白$\rangle$ がプレーヤー 1 の $\langle$黙秘$\rangle$ を強く支配:

$$u_1(\langle\text{自白}\rangle, \langle\text{黙秘}\rangle) > u_1(\langle\text{黙秘}\rangle, \langle\text{黙秘}\rangle)$$
$$u_1(\langle\text{自白}\rangle, \langle\text{自白}\rangle) > u_1(\langle\text{黙秘}\rangle, \langle\text{自白}\rangle)$$

‖

例. つぎのゲーム (男女の闘い; Battle of the Sexes; Bach or Stravinsky) ではいずれのプレーヤーも支配戦略を持たない (**演習**: 説明せよ):

		ふみ	
		Bach	Stravinsky
いちろう	Bach	$2, 1$	$0, 0$
	Stravinsky	$0, 0$	$1, 2$

- ふみが 〈Bach〉 という戦略を選んだとき，いちろうの利得を最大にする戦略は 〈Bach〉 になっている．(「ふみの 〈Bach〉 という戦略にたいするいちろうの**最適反応** (best response) は 〈Bach〉 である」という．)
- 逆に，いちろうが 〈Bach〉 という戦略を選んだとき，ふみの利得を最大にする戦略は 〈Bach〉 になっている．
- 戦略のペア (s, s') がたがいに相手の戦略にたいする最適反応からなっているとき (つまり s は s' にたいする最適反応，s' は s にたいする最適反応)，そのペアを**ナッシュ均衡** (Nash Equilibrium) とよぶ.「おたがいがナッシュ均衡を構成する戦略をとっているかぎり，どちらもそのペアを離れる誘因はない」という意味で，安定したペアである．
- 〈Bach, Bach〉 はこのゲームのナッシュ均衡である．
- 〈Stravinsky, Stravinsky〉 もナッシュ均衡である．
- これら以外にナッシュ均衡はない．

‖

定義. 戦略形ゲーム $(S_1, \ldots, S_I; u_1, \ldots, u_I)$ が与えられているとする．プレーヤー i の戦略 $s_i \in S_i$ が他のプレーヤーのとる戦略 $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_I)$ にたいする**最適反応** (best response) であるとは，すべての $s'_i \in S_i$ にたいして，

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

であること．

リマーク. 2 人ゲーム $(S_1, S_2; u_1, u_2)$ のばあい，プレーヤー 1 の戦略 $s'_1 \in S_1$ がプレーヤー 2 の戦略 $s_2 \in S_2$ にたいする最適反応であるとは，すべての $s''_1 \in S_1$ について，

$$u_1(s'_1, s_2) \geq u_1(s''_1, s_2)$$

となること．　$\|$

演習．ふみの $\langle$Bach$\rangle$ にたいするいちろうの**最適反応** (best response) は $\langle$Bach$\rangle$ であることをチェックせよ．

定義．戦略プロファイル $s^* = (s_1^*, \ldots, s_I^*)$ が**ナッシュ均衡** (Nash Equilibrium) であるとは，おのおののプレーヤー i について，戦略 s_i^* が他のプレーヤーのとる戦略 $s*_{-i} = (s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_I^*)$ への最適反応となっていること．

演習．囚人のジレンマを考える．囚人 2 の戦略〈黙秘〉にたいする囚人 1 の最適反応はなにか? 囚人 2 の戦略〈自白〉にたいする囚人 1 の最適反応はなにか? このゲームにナッシュ均衡は存在するか? 存在するならすべて列挙せよ．

2.2　選好，効用，プロファイル

個人の好みを定式化しよう．好みは

「私は○○ほうが××以上に好きだ」

といった,「もの」と「もの」とを比較する文の集まりとして表現できる．それぞれの「もの」はある集合 A の要素 (選択肢あるいはアウトカム) であると考える．上の文は，○○を x，××を y と書き，ある R という関係を使って，xRy と記号化できる．つまり

$$xRy \iff 私は\ x\ のほうが\ y\ 以上に好きである．$$

[$\iff$ は if and only if の意．つまり左辺と右辺が同等．] 上の表現は右辺の自然言語による文を左辺の数学的表現に記号化している．右辺の文の意味が抜け落ちている．意味を抜くことは曖昧さを取り除くために必要な作業であった．しかし必要以上に意味が抜けるのはわれわれの望むところではない．そこで右辺の文の意味をどうにかして左辺の数学的表現に取り込みたい．それは左辺の表現に，次に述べるようにある条件を与えることによってできる．

おまけ．しかし意味をすべて取り込むことができるわけではない．次に述べるように条件を課したあとであっても，xRy を「私は y のほうが x 以上に好きである」と (x，y 逆にして) 読まれる可能性は残っている．そのばあい，合理的な個人 (もっとも望ましい選択肢を実現しようとする個人) を想定してつくられた理論は，もっとも望

ましくない選択肢を実現しようとする個人からなる世界を記述する理論として読める．しかしそのような不自然な理論はたとえ整合的であっても，あまり意味のあるものではない． ‖

定義. 選択肢の集合 A 上の**選好** (preference) とは以下の条件をみたす関係 $R \subset A \times A$ のことである:[3]

完備性 (completeness) A に属する任意の x, y について，xRy または yRx がなりたつ;

推移性 (transitivity) A に属する任意の x, y, z について，もし xRy かつ yRz ならば，xRz になる．

選好は特定の個人の「好み」にかんする情報を集約．xRy は「x が y 以上に好ましい」,「x より y が好ましいわけではない」と解釈できる．

個人の選好を数値化したものが効用関数である (数値の大小で選好の順序を表現):

定義. R を選択肢の集合 A 上の選好とする．R を表現する**効用関数** (utility function) とは A 上の実数値関数 $u : A \to \mathbf{R}$ で，以下の条件をみたすものである: すべての選択肢 x と y について，

$$u(x) \geq u(y) \iff xRy.$$

定義. 個人の集合を $\{1, \ldots, I\}$ とし，選択肢の集合を A とする．おのおのの個人 i にたいして，その選好 R_i が与えられているとき，**選好プロファイル** (preference profile)，あるいはプロファイル，とは I-組 $(R_1, \ldots, R_I)$ のことである．

選好プロファイルは**全員の**「好み」にかんする情報を集約.

例. いくつかの集合の解釈:

- 集合 $\{i : xR_iy\}$ は x を y 以上に好む個人の集合
- 選好 $R_i = \{(x, y) : xR_iy\}$ は個人 i が x を y 以上に好ようなペア (x, y) の集合

[3]直積 $A \times A := \{(x, y) : x \in A, y \in A\}$ の部分集合 R を A 上の(2 **項**) **関係** ((binary) relation) とよぶ．A の要素と A の要素とを R で関係づけているからだ．$(x, y) \in R$ のことを xRy と書く．

- 集合 $\{x : xR_iy\}$ は個人 i が，与えられた選択肢 y 以上に好むような選択肢の集合 [1 以上の実数の集合 $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$ と比較せよ].

‖

演習. 選択肢の集合を $A = \{a, b, c\}$，個人の集合を $\{1, 2, 3\}$ とする．いま選好プロファイル (R_1, R_2, R_3) が以下のように与えられている:

$$R_1 : bac$$
$$R_2 : cba$$
$$R_3 : abc$$

(たとえば個人 1 は b を a よりも好み，a を c よりも好む．どの 2 つの選択肢も同等には好まれない．)

1. 以下の 3 つの集合のそれぞれについて，その要素をすべて列挙せよ: $\{i : bR_ia\}$，$\{i : aR_ic\}$，$\{i : aR_ia\}$.
2. 以下の 3 つの集合のそれぞれについて，その要素をすべて列挙せよ: $\{x \in A : xR_1a\}$，$\{x \in A : xR_2a\}$，$\{x \in A : xR_3a\}$.

2.3 遂行理論のフレームワーク

遂行理論の一般的フレームワーク (framework, 枠組み) を以下に提示する:

- **エージェント** (agents) i の集合を $\{1, \ldots, I\}$ とする．
- **実行可能なアウトカム** (feasible outcomes) の集合を A とする．
- **状態** (states)，あるいは自然の状態 (states of nature)，の集合を Θ とする．状態 $\theta \in \Theta$ が決まれば，それぞれのエージェントの A 上の選好が決まるものとする．(たとえばソロモンの例では状態が α に決まればアンナの選好が $abcd$ の順に決まった．)
- **選択関数** (choice function) f とは状態の集合 Θ からアウトカムの集合 A への関数 $f \colon \Theta \to A$ のことである．
- **メカニズム** (mechanism)，あるいは**ゲーム・フォーム** (game form)，とは戦略プロファイルの集合 $S_1 \times \cdots \times S_I$ からアウトカム集合 A への関数 g である．いいかえれば，ゲーム・フォームは
  - それぞれのエージェント i のとれる**戦略** (strategy) の集合 S_i，つまり取りうる行動の範囲，を定め，

- エージェントのとったそれぞれの戦略プロファイル $(s_1, \ldots, s_I)$ に対応するアウトカム $g(s_1, \ldots, s_I)$ を定める．

  ゲーム・フォームはプランナーがコントロールできるいわば「ゲームのルール」である．これにたいして，プランナーはひとびとの選好や行動を直接コントロールすることはできない．ゲームフォームが与えられたとき，選好プロファイルが決まれば，ゲームが決まる．(ゲーム・フォームの枡目を効用プロファイルに書き換えればいい．)

- **遂行問題**: 選択関数 f が与えられたとき，以下の条件をみたすメカニズム g が存在するか?:
  - 状態 θ で g がプレイされたときの「均衡アウトカム」が $f(\theta)$ だけになる．

以上のフレームワークの応用範囲は広い．たとえば公共財の供給問題にこのフレームワークをあてはめるには，状態 θ をそれぞれの社会構成員の望む公共財供給レベル，アウトカム $f(\theta)$ をそれぞれの構成員に払ってもらう額とその公共財の供給量，とすればいい．

Moore [1] は**完備情報** (complete information) のケースをあつかう．つまりエージェントがたがいに選好を知っているケースを考える．例:

- プレーヤー以外にプランナーが存在するばあい: ソロモンの判決のようなケース．
- プランナーが存在しないばあい: 定款 (constitution)—将来の決定を行うためのメカニズム g—を定めようとしているクラブ．事前にメカニズムを定めておいて，事後に (メンバーの選好などの状態が分かってから) それを適用する．
  - メカニズム g はたとえば投票などの方法 (だれがどれだけ票を持つかとか，どういう順番に投票を行うかなど)．
  - $f(\theta)$ は状態 θ が起こったときにクラブとして取るべき決定．(そういう f として何を選ぶかの合意はできているとする．ここでの関心はその合意を実行に移す方法．)
  - 状態 θ はクラブのメンバー同士は知ることができる (観察可能, observable) が，裁判所など他人にたいしては立証不可能 (unverfiable) な情報とする．
  - よって「状態 θ が起こったときには $f(\theta)$ を実行する」といった契約では，拘束力がない．(裁判所がその契約を破ったメンバーを罰することができない．)
  - 拘束力のある契約 g は立証可能な情報 (クラブへの寄付金額とか会費を納めたかなど?) にもとづくものでなければならない．

メカニズムを定めるかわりに，状態 θ が実現してからアウトカムをどうしようかと交渉することはできないことはない．しかしそれでは事前的な非効率が生じる．詳しくはセクション 7 で．

2.4 遂行概念

以下ではソロモンの問題や企業間の契約のコンテキストで，いくつかの遂行概念を考える．それぞれの遂行概念のちがいは，メカニズムがゲームとしてプレイされるときに適用される均衡概念 (equilibrium concept) のちがいに由来する．[4]

理想を言えば，**支配戦略均衡** (dominant strategy equilibrium) による選択関数の遂行ができるのがいい．これは，それぞれのエージェント (プレーヤー) が (他人の戦略がなんであっても) いつでもとりたい特定の戦略を持つばあい (セクション 2.1 参照)．残念ながら，この均衡概念で遂行できる関数はひじょうに限られている (PART 2, Section **??**)．よってわれわれはナッシュ遂行という概念からはじめる．

ゲーム理論は**与えられた**ゲームがどのようにプレイされるかに関心がある．一方，遂行理論（メカニズム・デザイン）はゲームを**設計すること**に関心がある．よって，設計したメカニズムがうまくいかない (たとえばエージェントの行動が予測しがたいようなケース) なら，ほかのメカニズムを考えればいい.「まず均衡概念を決めて，そのあとにゲームを探す」という逆転の発想.

2.5 遂行問題のイメージ

[図を使いながら直観的に説明]

1. プランナーはどういうアウトカムを実現すればいいのかについて，目標を持っている．ただし，その目標は (プランナーには分からない) 状態に依存する．つまり目標はそれぞれの状態に，実現したいアウトカムを対応させる選択関数として表現できる．
2. プランナーはゲームのルール (ゲーム・フォーム) を設計し，プレーヤーに熟知させる．ゲーム・フォームのイメージは，2 人のケースでいえば，戦略ゲームを表す行列の枡目が，アウトカムで埋められた状態．あるいはゲームツリーの頂点 (終節，terminal nodes) が (利得列のかわりに) アウトカムで埋められた状態.

[4]ゲーム理論はゲームが与えられたときに，プレーヤーがどう行動しその結果がどうなるか，についての仮説をいくつも持っている．ひとつひとつの均衡概念は異なる行動仮説に対応している．ややフォーマルないい方をすれば，均衡概念とは，任意のゲームにたいして,「均衡」とよばれる戦略プロファイルをすべて対応させる，一種の関数．たとえば支配戦略均衡や，ナッシュ均衡は，それぞれ特定の均衡概念を定義している．その均衡戦略プロファイルをゲームフォームでマップしたものが均衡アウトカム．

3. プレーヤーはアウトカムにたいする選好を持っている．選好は状態が決まれば自動的に決まる．選好が効用関数で表せるとすれば，プランナーの設計したゲームフォームのそれぞれの枡目のアウトカムを数値で評価できる．よってそれぞれの状態について，ゲームが定まる．
4. プレーヤーはゲームをプレイする．そのときのプレーヤーの行動を予測するのが均衡概念．均衡概念は上で決まったゲームがプレイされたときの均衡戦略プロファイル (イメージは行と列の組みあせ) を決定する．上のゲーム・フォームで，この戦略プロファイルに対応するアウトカムが均衡アウトカム (特定の枡目)．それぞれの状態について，対応する均衡アウトカムが決まる．
5. もしそれぞれの状態で，均衡アウトカム (プレーの結果) が選択関数のしめすアウトカム (目標) と一致したら，プランナーはこの選択関数を遂行できたことになる．これができるように (前のステップで) うまくゲーム・フォームを選ぶのがプランナーの遂行問題.

3　ナッシュ遂行

ソロモンの選択関数 f ($f(\alpha)=a$ **かつ** $f(\beta)=b$) **はナッシュ遂行できない (ナッシュ均衡概念では遂行できない).**

ナッシュ遂行できない理由 (これをきちんと理解することを**演習**とする; 答えは以下のとおり; 試験に出すときは穴埋めなど; 穴はできるかぎり論理だけで埋められるようなものにしたい):

[Moore Figure 5.1]

		Bess		
			s_2	
Anna			$\vdots$	
	s_1	$\cdots$	a	$\cdots$
			$\vdots$	

仮にアンナとベスをプレーヤーとするゲームフォーム g が f を遂行するとする (背理法[5]の仮定).

- 状態 α を考える.
  - $f(\alpha)=a$ だから，f が遂行できるにはアウトカム a がゲームフォーム g を表す行列の枡目のどこかに現れなければならない．その枡目に対応するナッシュ均衡を (s_1, s_2) とよぼう．ナッシュ均衡の定義により，s_1 にたいする最適反応は s_2 で，s_2 にたいする最適反応は s_1 である.
  - s_2 が s_1 にたいする最適反応であるためには，s_1 の行にベスにとって a より望ましいものが現れてはならない．状態 α のときのベスの選好は $bcad$ だからその行は a または d で埋まる.
- 状態 β を考える．アンナの選好は $acbd$ で，ベスのは $bacd$．アンナにとって a はベストだからあきらかに s_1 は s_2 たいする最適反応．s_1 の行には a と d しか現れないから，s_2 は s_1 にたいする最適反応．よって (s_1, s_2) はナッシュ均衡で，a はナッシュ均衡アウトカム.
- f を遂行するゲーム・フォームが状態 β でプレイされたときの均衡アウトカムは $f(\beta)=b$ **だけ**でなければならなかった．ところが上では a が均衡アウトカムになってしまっているので矛盾.

一般に，選択関数がナッシュ遂行可能であれば，その選択関数はMaskin **単調性** (Maskin monotonicity) とよばれる条件をみたさなければならない．(単調性はナッシュ遂行可能であるための必要条件．)

[5]ある命題を証明するのに，その命題の否定を仮定して**矛盾** (contradiction) をみちびく方法がある．この方法を**背理法** (proof by contradiction) とよぶ.

この条件はたとえば状態αから状態βに移ることにより，アウトカム$f(\alpha)=a$が両方の女性の選好において上昇すれば (いいかえれば，βでaより好まれているアウトカムがぜんぶαでもaより好まれていたならば)，aは状態βでも目標とするアウトカム$f(\beta)$になっていなければならないということを要求する．これが必要条件であるのをしめすのは簡単．

ソロモンの例では$f(\beta)=b\neq a$なので，fはMaskin単調性をみたさない．

Maskinの特筆すべき貢献は，単調性がナッシュ遂行のための**十分条件**であることを3人以上のケースについてしめしたことにある．

4　展開形ゲーム・フォームによるナッシュ遂行

第3節のナッシュ遂行可能性の議論では，**戦略形**のゲーム・フォーム (2人のケースでいえば，ゲーム行列で表されるもの) をもちいた．

かわりに**展開形**のゲーム・フォーム (ゲーム・ツリーで表せる) をもちいることもできる．するとゲームが何段階かでプレーされることになる．このとき「**サブゲーム完全均衡** (subgame perfect equilibrium)」という概念をもちいることで，いくつかのふさわしくないナッシュ均衡を取り除けることがある．

遂行問題を解くときの大きな壁は均衡が多すぎることである．いくつかの均衡を取り除くことができたら，遂行問題が解決できる可能性が潜在的にひろがる．

しかし最近の研究 (Moore and Repullo, 1988; Abreu and Sen, 1990) がしめすところでは，アウトカムをa，b，c，dの4つに限ることを前提とすれば，展開系ゲーム・フォームをもちいてもソロモンの (部分ゲーム完全均衡による) 遂行問題は解決できないという．Part Two 第**??**節参照．

5　支配されないナッシュ遂行

Palfrey and Strivastava (1991) のメカニズムはソロモンの選択関数を遂行することができる．遂行概念は**支配されないナッシュ均衡** (undominated Nash equlibrium) とよばれるもので,「プレーヤーは弱い意味で支配された戦略を使わない」という行動仮説が入っている．

定義. 戦略形ゲーム$(S_1,\dots,S_I;u_1,\dots,u_I)$が与えられているとする．他のプレーヤーの戦略がなんであれつねに戦略$s_i\in S_i$が戦略$s_i'\in S_i$以上に (プレーヤーiにとって) のぞましく，かつ他のプレーヤーの戦略の少なくとも一組にたいして戦略s_iが戦略s_i'よりものぞましいとき,「s_iはs_i'を**弱い意味で支配する** (weakly dominates)」という:

- すべての$s_{-i}\in S_{-i}$にたいして，$u_i(s_i,s_{-i})\geq u_i(s_i',s_{-i})$となり，

- ある $s_{-i} \in S_{-i}$ にたいして，$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$ となる．

The Palfrey-Strivastava mechanism:

- 女性 i の戦略は (θ_i, k_i) で，$\theta_i \in \{\alpha, \beta\}$ は状態，$k_i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ は正の整数．(あくまでもひとつの解釈: θ_i は女性 i が訴えるところの本当の母親，k_i はその訴えを発するときの声の大きさまたは訴えを繰り返した回数．)
- 戦略プロファイルにアウトカムを対応させる関数 g はつぎのようになる．
  - ２人の表明する状態が異なれば $(\theta_1 \neq \theta_2)$，アウトカムは皆殺し $g((\theta_1, k_1), (\theta_2, k_2)) = d$.
  - もし２人が同じ状態を表明したら，アウトカムはつぎの図で決まる．２人が訴えるところの本当の母親が，相手より大きな数を表明しないかぎり (相手より声が大きくないかぎり)，子供はその母親に戻る．そうでなければ子供は切り裂かれる．[Figure 5.2]

以上のメカニズム g はソロモンの選択関数 f を「支配されないナッシュ均衡」で遂行する(演習):

- アンナが本当の母親のとき (状態 α; アンナの選好 $abcd$; ベスの $bcad$)，唯一の均衡は $((\alpha, 1), (\alpha, 1))$ になる:
  - ２人の訴える本当の母親は一致する．もし一致しなければアウトカムは皆殺し; これは２人のいう母親が一致したばあいのいずれのアウトカムより悪いので，均衡にはならない．
  - もし２人ともアンナが本当の母親といったばあい，左側の行列が適用．アンナにとって，支配されない戦略は $(\alpha, 1)$ のみ．ベスにとって，支配されない戦略は $(\alpha, 1)$ のみ．よって支配されないナッシュ均衡は $((\alpha, 1), (\alpha, 1))$ となり，アウトカム $g((\alpha, 1), (\alpha, 1)) = a$ が実現する．
  - もし２人ともベスが本物の母親といったばあい，右側の行列が適用．アンナの戦略 (β, k_1) はすべて支配されている．(ベスは支配されない戦略 $(\beta, 1)$ をもつ.）よって支配されないナッシュ均衡は存在しない．
- ベスが本当の母親のとき (状態 β; アンナの選好 $acbd$; ベスの $bacd$)，唯一の均衡は $((\beta, 1), (\beta, 1))$ になる:
  - ２人の訴える本当の母親は一致する．上述の理由で．

– もし２人ともアンナが本当の母親といったばあい，??側の行列が適用．アンナにとって，支配されない戦略は??ベスにとって，支配されない戦略は?? よって支配されないナッシュ均衡は??

– もし２人ともベスが本物の母親といったばあい，??側の行列が適用．アンナにとって，支配されない戦略は??ベスにとって，支配されない戦略は?? よって支配されないナッシュ均衡は??

このメカニズムは実用的とはいいがたい．**無限の**戦略集合をもちい，tail-chasing (しっぽを追いかけること) にたよることで，要らない均衡を除いているから．Moore「ソロモンは Palfrey と Srivastava の首を切ったかも.」

6　別払いのあるメカニズムによるサブゲーム完全遂行

ここでソロモンが経済学者を雇ったとする．経済学者はおそらくお金をもちいた解決策をしめすのでは．子供を渡すというコンテクストでは下劣ではあるが，うまくいく解決策である．

単純化のために，

- 本当の母親にとってのその子供の価値 (子供を取り戻すために払っていい額; 評価額) を v^m,
- 偽の母親にとってのその子供の価値を v^n

とする．２人の女性は互いの評価額を知っている．ソロモンは $v^m > v^n$ という事実だけを知っている．

ソロモンの目的は本当の母親に子供を渡すこと．母親が支払いをすべきだということを選択関数 f はいっていない．よってふつうのオークションによる解決ではだめ．

以下の展開形ゲーム・フォームであらわされたメカニズム g が f を遂行する．

[Figure 5.3 に，状態ごとの利得と Stage 3 での分岐条件を記入した図を挿入．]

ソロモンはプレイの行われる前に２人にメカニズムの詳細を伝える．

リマーク. 展開形ゲーム (ゲームツリーで表されているゲーム) の**サブゲーム完全均衡** (subgame perfect equilibrium) とは，(i) もとのゲームのナッシュ均衡 s で，(ii) どのサブゲームについても，s をそのサブゲームに制限したものがそのサブゲームのナッシュ均衡になっているようなもの．ここでは正確な定義にあまりこだわる必要はない．この均衡概念はゲームを逆向きに解いていく方法に相当する．[例]　‖

メカニズム g はソロモンの選択関数 f をサブゲーム完全均衡で遂行する(演習):

- アンナが本当の母親のとき (状態 α)，アンナが自分が本当の母親だといい，ベスがそれに同意するのが均衡になる．よって子供はアンナへ渡される:
  - Stage 3 でアンナは $v^m - v - F \geq -F$ のときのみ，つまり $v^m \geq v$ のときのみ，対抗する．
  - もし Stage 3 でアンナが対抗してきたら Stage 2 でベスが対抗したときのベスの利得は $-F$．Stage 2 で同意して子供をあきらめたほうがまし (利得 0) である．
  - もし Stage 3 でアンナが対抗してこなかったら (このとき $v^m \leq v$ になっている)，Stage 2 でベスが対抗することにより，ベスは子供を得ることができる (利得は $v^n - v$)．ところが対抗するためのつけ値 v が高くなりすぎるので，ベスは対抗しないほうがましである．($v^n < v^m \leq v$ なので，利得は $v^n - v < 0$ になる．)
  - 以上により，Stage 2 ではベスが同意するはずである．そうすると Stage 1 でアンナは自分が本当の母親だと言う方が有利.
- ベスが本当の母親のとき (状態 β)，アンナが自分は母親でないと言うのが均衡になる．子供はベスへ渡される:
  - Stage 3 でアンナは $v^n - v - F \geq -F$ のときのみ，つまり $v^n \geq v$ のときのみ，対抗する．
  - もし Stage 3 でアンナが対抗してきたら，Stage 2 でベスが対抗したときのベスの利得は $-F$．Stage 2 で同意して子供をあきらめたほうがましである．しかしベスは Stage 2 で v を v^n より高く設定することで，このケースを避けることができる．
  - Stage 2 でベスが v を v^n より高く設定すると，Stage 3 でアンナは対抗してこない．ベスは子供を得ることができる (利得は $v^m - v$)．Stage 2 でベスは $v^m - v \geq 0$ となる v を見つけられるなら，対抗したほうがましである．これは $v^n < v < v^m$ となるように v を設定することで，可能．つまりアンナのより高い値を本当の母親であるベスがつければいい．
  - そうするとアンナは Stage 1 で (利得 0 と利得 $-F$ とを比較) 子供は自分のものでないと言ったほうがましである．

コメント:

- メカニズムの後ろの方のステージにはじっさいは到達しない．それらはある種の脅しを与えているだけである．

- 状態 β で，べつのナッシュ均衡 (v の値にかかわらず，Stage 3 でアンナがつねに対抗する) があるが，それはサブゲーム完全均衡にはならない．

- 罰金 $F > 0$ はいくらでも小さくとれる．

- ２人の評価額が互いにきちんと分かっている必要はない．本当の母親の評価が偽の母親の評価よりも確率１で高いということだけが重要．

- 第 4 節で，展開形ゲーム・フォームをもちいたのに，サブゲーム完全遂行ができなかったのは，お金が使われていなかったからである．お金の導入はエージェントの選好に，遂行問題を簡単にするある種の構造を与える．

紀元前４，5 世紀のアテネにみられた一種の課税法は，このタイプのメカニズムであった．

7 契約による遂行のモデル

前節では 2 人の女性の選好が特別な形をしていたため，小額の罰金をもちいた単純なメカニズムで選択関数をサブゲーム完全遂行できた．一般にはお金が存在していて，選好が quasi-linear の効用関数 (お金の定数倍が効用に加わるような効用関数) で表されるようなばあいであっても，罰金の額を大きくし，複雑なメカニズムを使わなければ遂行できないのが典型．

契約 (contract) のモデルを考える．これはソロモンの例とはちがい，(エージェントとはべつの) プランナーがいない．応用範囲の広いモデル．

垂直的統合されていない 2 企業を考える．企業 1(売り手) が企業 2(買い手) にある商品を供給している．その供給量を q とし，支払額を p とする．[図]

- 企業 1 の事後的な利潤は $p - c(q, \theta_1)$ で，c は状態 θ_1 で決まる費用関数．

- 企業 2 の事後的利潤は $v(q, \theta_2) - p$ で，v は状態 θ_2 で決まる (貨幣額による) 便益をあらわす関数．

- 状態は $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta$ になる．その背後に世界をもっと詳しく記述した (たとえば需要，原料の価格，技術などの情報) 状態 $\omega \in \Omega$ があると考えてもいい．

- 状態 θ_1 と θ_2 の値には関係 (統計的従属) があるかもしれない．

- じつは q はもっと自由に解釈してもかまわない: 製品の質，届ける時間など．

- 2 企業は一般的に支払額 p と量 q とを状態 θ の関数にしたい．たとえばジョイントの余剰 $v(q, \theta) - c(q, \theta)$ を最大にする $q(\theta)$ とか．2 企業の遂行したい選択関数は $f(\theta) = (q(\theta), p(\theta))$ になる．

- 状態 θ は 2 企業以外の者に立証不可能．よって，p や q を直接 θ に依存させる契約ではうまくいかない．
- たとえ ω が事後的に観察可能で立証可能であっても，価格や量を状態 $\omega \in \Omega$ に完全に依存させるのは，複雑さからいって無理がある．**不完備な** (incomplete) 契約をもちいざるをえない．

2 企業にとって必要なのはメカニズムである．メカニズムのポイントは，それが世界の状態から独立に定義されていることにある．2 企業は以下のような契約を事前に交わすことができるとする: **「企業 1 と企業 2 はメカニズム g を明日 (事後的に) プレイすることを約束する．そのときプレイすることを拒否した企業は，(取り返しのつかないほどの額に定められた) 罰金を相手側に払うものとする.」**

- この契約は状態に依存した契約ではない．同じメカニズムをすべての状態でプレイするという契約.
- この契約は実行できる (enforceable，強制力を持つ)．立証可能な情報のみをもちいている．
- 選択関数 $f = (q, p)$ を遂行するようなメカニズムをみつけられれば，契約の中で述べることを状態 $\omega \in \Omega$ に依存させなければならないという問題は脇におくことができる．

以下にそのようなメカニズムをあげる．関数 q や p が何をしめすかは重要ではない．

[Figure 5.4]

このメカニズムは 3 段階からなる．Stage 1 で企業 1 のタイプ θ_1 を引きだし，Stage 2 で企業 2 のタイプ θ_2 を引きだす．これらが分かってしまった後に，Stage 3 で選択関数 $f(\theta) = (q(\theta), p(\theta))$ が実行される．最初の 2 段階は対称になっている．

このメカニズムは $\epsilon > 0$ と $F > 0$ をパラメータとする．

命題. **Θ が有限だとする．罰金 F がじゅうぶん大きく，$\epsilon > 0$ が十分小さいとき，Figure 5.4 のメカニズムは望ましい $q(\cdot)$ と $p(\cdot)$ とをサブゲーム完全遂行する．**[6]

説明 (**演習**):

- Stage 1.1 において企業 1 は，企業 2 に Stage 1.2 で対抗されることをおそれる．もし対抗されたら，Stage 1.3 で企業 1 は罰金 F を払わなければならないから．F がじゅうぶん大きいとき，これは避けたい．

[6] 費用関数 c と便益関数 v が有界で，下に述べる “preference reversal” がおこるという条件を仮定.

- では企業 2 は対抗してくるか?
  - 企業 1 が本当の θ_1 を言ったとき．もし企業 2 が対抗すれば，企業 1 は Stage 1.3 で (q,p) を選ぶ．$(p-c(q,\theta_1)-F > \hat{p}-c(\hat{q},\theta_1)-F$ だから．) そうすると企業 2 も大きな罰金 F を課されてしまう．企業 2 はそれはさけたい．($p \geq 0$ だから，企業 2 が利潤をあげて F を打ち消すにも限りがある．)
  - 企業 1 が嘘の θ_1 を言ったとき．このとき企業 2 は Stage 1.2 でうまく対抗することによって，Stage 1.3 で報酬 F を受け取ることができる．これをしめすため，仮に真の状態を ϕ_1 とする．$\epsilon > 0$ がじゅうぶん小さいとき，($c(\cdot,\theta_1)-c(\cdot,\phi_1)$ が定数でないと仮定すれば) 以下の "preference reversal" が起こるように (q,p) と $(\hat{q},\hat{p})$ とをとれる:[7]

    $$p-c(q,\theta_1) \geq \hat{p}-c(\hat{q},\theta_1)+\epsilon$$
    $$p-c(q,\phi_1) < \hat{p}-c(\hat{q},\phi_1).$$

    (最初の式は "test pair" の条件; その左辺は状態が θ_1 だったときの (q,p) における企業 1 の利潤．) 2 番目の式から，企業 1 が Stage 1.3 で $(\hat{q},\hat{p})$ をとることが分かる．そうすると企業 2 は企業 1 から F を受け取ることになるから，その値が大きければ，これは企業 2 の望む結果である．
- よって企業 2 は企業 1 が嘘をいったとき，そしてそのときにおいてのみ，対抗してくる．
- よって企業 1 が本当の θ_1 を言って，Stage 2 にすすむことになる．
- 同じ議論により，企業 2 は本当の θ_2 を言う．そして Stage 3 にすすみ，望まれる q と p が実現する．

コメント:

- Stage 1.3 で，企業 1 は「いつも (q,p) を選ぶぞ」と脅しをかけておきたいところ．もしその脅しに信ぴょう性があれば，企業 2 は F を支払うのをさけるため，Stage 1.2 で同意するだろう．そして企業 1 は Stage 1.1 で好き勝手なタイプを報告できたはず．しかしこの脅しには (自分に不利なことをやるぞと言っているわけだから) 信ぴょう性がない．(第 8 節参照．)

[7](この脚注の内容はおまけ．Θ が有限であることを暗黙に使っているなど，少々ごまかしがある．) 仮定により関数 $e(q) := c(q,\theta_1)-c(q,\phi_1)$ は定数でない．したがってある q と $\hat{q}$ について，$e(\hat{q})-e(q) > \epsilon$ となるようにとれる (ϵ がじゅうぶん小さいので)．これを書きかえれば，$c(\hat{q},\phi_1)-c(q,\phi_1) < c(\hat{q},\theta_1)-c(q,\theta_1)-\epsilon$ が得られる．右辺を $\hat{p}-p$ と置けばよい．[$c(\cdot,\theta_1)$, $c(\cdot,\phi_1)$ のグラフ，最後の不等式の数直線表示．]

- 嘘をつくのを抑止するため，そして嘘がつかれてしまったときにそれに対抗するのを助長するため，罰金 F はじゅうぶん大きくなくてはならない．

- このメカニズムは契約のモデル以外にも使える．たとえば公共財の供給問題．エージェントの数が 3 人以上になれば，第 3 者に罰金 $2F$ を払うかわりに，エージェントの間で分配する方法がある．

- 3 人以上のケースでは情報が完備である必要はない．それぞれのエージェントについて，他のだれかがその状態を知っていればよい．ただしその状態を知る人がだれであるかは最初から分かっていなければならない．

- 互いの状態を知っているような仲であれば，将来の長期的関係が問題になる．ひとつの契約だけに注目する分析には限界がある．

- 完備情報の仮定がみたされない状況では，まったくの非効率がおきる可能性がある．不完備情報のばあいをあつかうには**ベイズ遂行** (Bayesian implemantation) とよばれる遂行概念をあてはめるべき．

- サブゲーム完全均衡を使ってうまくいくだろうか?(第 8 節参照．)

8 サブゲーム完全遂行の問題点

第 7 節ではサブゲーム完全遂行を考えた．しかし現実にエージェントはサブゲーム完全均衡の戦略をプレーするだろうか? サブゲーム完全均衡はあまりにも合理性を強く仮定していないか?

企業 1 のつぎのような「不合理な」戦略を考える:「Stage 1.1 で嘘をつく; そして Stage 1.3 でかならず (q, p) を選ぶ.」

- もし企業 1 がこのように行動すると企業 2 が考えれば，企業 2 は罰金 F を支払うのをさけるため，Stage 1.2 で同意するだろう．そうすると企業 1 は Stage 1.1 で好き勝手にタイプを報告したにもかかわらず害を免れる．

- じっさい，企業 1 が Stage 1.1 で嘘をつくこと自体が，企業 1 が Stage 1.3 でも「不合理な」やり方で行動することを企業 2 に示唆している．企業 2 が企業 1 の脅しを信じる可能性が高くなる．

- 問題のむずかしさのひとつは，(Stage 1 だけを考えても) 企業 1 が Stage 1.1 と Stage 1.3 の 2 回プレーするようになっていることになる．企業 1 が最初のステージで「不合理に」行動したばあい，企業 2 は企業 1 のその後の行動が予測しにくい．

この手の問題はそれぞれのエージェントが 1 度しかプレーしないようなメカニズムを考えることでかなり回避できる．ただしそのようなメカニズムで遂行できる選択関数は限られてくる．遂行できる例をここにあげる．

第 7 節の例の特殊ケース:

- 売り買いされる量は $q=1$ か $q=0$.
- 企業 2(買い手) にとって，この商品 1 単位の価値は $v=100$.
- 企業 1(売り手) にとって，この商品 1 単位を製造するコスト c はつぎの不等式をみたす: $c' \le c \le c''$，ただし c' と c'' は $0 < c' < c'' < 100$ となるように固定された数．よって事後的にはこの商品を売り買いするのが効率的; すべての c について，最適な量は $q(c)=1$.
- 2 企業は**リスク回避的** (risk averse)[8]であり，リスクをシェアー (分担) したい．売り手が買い手より危険回避的であり，最適なリスク分担を達成する価格は $p(c)=K+2c/3$，ただし K はある定数，になるとする．
- 企業 2(買い手) の事後的利得 (余剰) は $v-p(c)=100-K-2c/3$ になる．
- 企業 1(売り手）の事後的利得は $p(c)-c=K+2c/3-c=K-c/3$ になる．
- 定数 K は利得の事前的な分配で決まる．$c''/3 < K < 100-2c''/3$ を仮定する．**演習**: このとき企業 1 の利得も企業 2 の利得も正になることをしめせ．
- 状態，つまりコスト c は 2 企業のみによって観察可能．よって条件付きの契約ではだめ．選択関数 $f(c)=(q(c),p(c))$ を遂行する契約はどうなるか?

以下のメカニズムが f をサブゲーム完全遂行する．

[Figure 5.5; 利得も記入]

理由 (**演習**):

- 企業 2 の利得は
  - $100-K-2c/3>0$ (企業 1 が同意したとき)
  - $-K+c/3<0$ (企業 1 が対抗したとき).

  よって企業 2 は企業 1 に同意してもらいたい.

[8] 期待値が等しければ，不確実な利得より確実な利得を好むこと．たとえば,「10 パーセントの確率で 10 万円当たるくじ」よりも，現金 1 万円の方を好む．不確実性と情報の経済学に詳しいミクロ経済学のテキストとしては丸山，成生 [4] がある．

- 企業 1 に同意してもらうためには企業 1 の利得の不等式

$$K + 2c/3 - c^t \geq K - c/3 \tag{1}$$

がみたされなければならない (c^t は真のコスト; 左辺が同意したときの企業 1 の利得，右辺が対抗したときのもの).

- 不等式 (1) をみたしつつ，企業 2 の利得 $100 - K - 2c/3$ を最大にするのは (1) をみたす最小の c，つまり $c = c^t$.

- つまり企業は本当のコスト c^t を言い，最適リスク分担を実現する価格 $K + 2c^t/3$ で取り引きが行われる.

コメント:

- このメカニズムはとても単純．もし企業 1 が企業 2 の言った c に対抗しようとするなら，その c が本当のコストであったときに企業 1 が得られた利得に等しい額 $K - c/3$ を受け取ることを主張できる．つまり企業 2 が社会的余剰のロスをすべて被ることになる.

- このメカニズムでは，それぞれのエージェントは 1 度しかプレイしない．よって，サブゲーム完全均衡を適用することに前節ほど問題はない.

- この種のメカニズムは，1 人のエージェントだけが不確実性に直面しているケースや，両方のエージェントの選好が完全に相関関係にあるケースでうまく働く.

9 再交渉

第 8 節の議論のあきらかな問題点は，メカニズムが**再交渉** (renegotiation) にたいして弱みを持つことである．これは特にプランナーがいないばあいのメカニズムデザインの文献の大部分がかかえる問題点.

- Figure 5.5 のメカニズムで，売り手 (企業 1) が対抗したときを考える．そのとき買い手が売り手に $K - c/3$ を払って，取り引きなしにゲームは終わった．しかしこの時点で，古い契約を撤回して新たな価格で取り引きをすることは両方の企業にとって利益になるかもしれない.

- 新たな取り引きを企業 1 が予測すれば，不等式 (1)，つまり $K + 2c/3 - c^t \geq K - c/3$，は成り立たなくなる．(左辺が同意したときの企業 1 の利得，右辺が対抗したときのものだった．しかし新たな取り引きの利得を考えれば，右辺はもっと大きくなる．) 企業 1 は以前よりももっと対抗するようになる.

- よってこのメカニズムは目標とした価格を遂行しなくなる.

では再交渉の可能性は，事前に契約すること自体をエージェントに放棄させてしてしまうのか? じつはそうではない.

- 事前の契約はエージェントをある事後的な現状点 (status quo point) に至らせることによって，彼らが新たな交渉をはじめるのを助ける.
- メカニズムをうまくデザインすれば，再交渉後におちつくアウトカムが目標とする選択関数を「間接的に」遂行するようにできるかもしれない.
- そのばあい，再交渉のあり方 (事後的な状態でだれがどれだけ交渉力を持つか) によって，選択関数を間接的に遂行するメカニズムはかわってくる.

再交渉へのいくつかのアプローチ:

- Maskin and Moore (1987) は再交渉のプロセスを**外生的に**与えたとき，何が遂行可能かを特徴づける．再交渉はメカニズムのプレイが終わった時点で始まるものとし，エージェントはあらかじめ再交渉のあることを予想している．Moore [1, Part two, Section 7] 参照.
- 再交渉プロセスを (外生的に与えられたものとするかわりに) エージェントのおかれた状況 (彼らがどのようにコミュニケートしたり売り買いするかなど）から導き，何が遂行できるか探るアプローチもある (Hart and Moore (1988)).
- もっと野心的なアプローチとして，再交渉プロセスをコントロールできる (内生化する) ようなメカニズムを考えることもできる．Rubinstein and Wolinsky は，売り手と買い手とが価格をオファーする権利をかわるがわる一定時間与えられた，逐次的なメカニズムを考える．この交代の頻度を高くすれば，このメカニズムによって記述された再交渉が，あらゆるインフォーマルな (メカニズムの外での) 再交渉を「支配する」という意味でコントロールできることをしめした．(ひとびとが性急であることを利用．) この方法で広範な価格関数が遂行できる.
- Rubinstein and Wolinsky のメカニズムは，それがプレイされるのをプランナーあるいは第三者がしっかり監視する必要がある．また，監視者が買収される危険もある．よって非現実的すぎるかもしれない.

Aghion, Dewatripont, and Rey (199?) のモデルでは，再交渉プロセスが売り手に有利になるように設定している．これは買い手から売り手に多額なデポジットを渡しておく (そしてそれが利子を生まない) という仮定により実現.

フレームワーク:

- リスク中立的な買い手と売り手.
- 時間の流れはつぎのとおり:
  - 日付 T_1: 契約にサイン
  - 日付 T_2: 買い手が β を投資 (コスト $B(\beta)$); 売り手が σ を投資 (コスト $S(\sigma)$)
  - 日付 T_3: 状態が買い手と売り手に分かる
  - 日付 T_3 以後: 再交渉? 取り引き?
- 「日付 T_3 以降に取り引きする」という契約を，日付 T_1 に交わす.
- T_1 の時点では，T_3 での製品のコストと価値に不確実性がある.
- 状態は Good と Bad の 2 つで，おのおの 1/2 の確率でおこる．状態が分かるのは T_3．ただしこの状態は第三者に立証できない.
- 契約が交わされたより後で，状態が分かるより前のある日付 T_2 において，両者はそれぞれ契約には書けない投資をする: 買い手が $\beta \geq 0$ を，売り手が $\sigma \geq 0$ を．そのとき私的なコストはそれぞれ $B(\beta)$ と $S(\sigma)$.
- 取り引きの量が $q \geq 0$ のとき，それぞれの状態 (state) での買い手の評価額と売り手のコストは以下の表で表される (買い手の投資 β が大きいほど買い手への価値が大きくなっており，売り手の投資 σ が大きいほど売り手へのコストが小さくなっている):

	Good state	Bad state
買い手への価値	$35(1+\beta)q$	$28(1+\beta)q$
売り手へのコスト	$14(1+1/\sigma)q^2$	$32(1+1/\sigma)q^2$

- 投資 β と σ が与えられたとき，q の効率レベルは

$$q = \begin{cases} \frac{5\sigma(1+\beta)}{4(1+\sigma)} & \text{in Good state} \\ \frac{7\sigma(1+\beta)}{16(1+\sigma)} & \text{in Bad state} \end{cases} \tag{2}$$

  で表される．[9]
- 両者の事後的交渉により，この効率レベルは達成できるものと仮定できる.
- むずかしいのは投資レベルをどうするかである．この投資は契約に盛り込めないので，それぞれが非協力的に選ぶことになる．そうすると過小投資が起こる．同じ量を投資しても，事後に相手に一部を持っていかれることになるから．(妨げたり，遅らせるという意味からだろうか，ホールド・アップ問題 (hold-up problem) と言われる．)

[9] 効率レベルは余剰 (買い手への価値と売り手へのコストの差) を最大にする．たとえば Good state で効率な q は，$35(1+\beta)q - 14(1+1/\sigma)q^2$ を最大にする．微分のできる読者は計算せよ.

- 具体例としては，家を建てるときの契約などか?

さて，効率レベルの q と効率レベルの投資を引きだすような契約はあるか? それはある (以下の分析を**演習**とする)．特定の数値例で考える: T_3 のドルで測って，投資のコストが $B(\beta)=14\beta^2$ と $S(\sigma)=7\sigma^2/144$ のばあい．

- このときの効率投資レベルは $\beta=\sigma=144$ である．[10]

- 効率投資 $(\beta,\sigma)=(144,144)$ が与えられたときの効率的な q は，式 (2) により
$$q=\begin{cases}180 & \text{in Good state}\\ 63 & \text{in Bad state}\end{cases}$$
になる．

- **以下の契約を** T_1 **で交わすことにより，最適投資** $(\beta=\sigma=144)$ **と最適レベルの売り買い** (Good state **で** $q=180$; Bad state **で** $q=63$) **とを実現できる．** 売り手と買い手との契約内容:
  1. 売り手，買い手のそれぞれが，日付 T_3 以降に総額 P(いつ取り引きがあるかにかかわらず固定された値) で 128 単位の売り買いを相手に義務づける権利をもつ．
  2. 日付 T_1 において，買い手は売り手に多額なデポジットを払う．128 単位の取り引きがあるまでは売り手がそのデポジットを保有する．
  3. 取り引きがあったら，デポジットは利子とともに買い手にすぐに返却される．ただし利子は T_3-T_1 の期間にたいしてのみ払われる．T_3 以降，取り引きがあるまでの期間については支払われない．

- T_3 以降に利子がつかないため，買い手は早く取り引きを行いたい．

- しかし 128 単位というのは，Good state と Bad state のどちらにおいても効率レベルではない．よって 2 者は再交渉を予想して行動するとする．

- 買い手は早く取り引きをしたい一方，売り手は時間稼ぎによって損をしない．よって再交渉から得られる追加的な余剰は売り手のものになる．つまり，買い手の利得は契約によって保証される「留保レベル」に抑えられる (Good state では $35(1+\beta)128-P$; Bad state では $28(1+\beta)128-P$)．

- T_2 における買い手の利得の期待値は
$$\frac{1}{2}[35(1+\beta)128-P]+\frac{1}{2}[28(1+\beta)128-P]-14\beta^2$$

[10] 投資 (β,σ) が与えられたときの余剰 (買い手への価値と売り手へのコストの差) の最大値をそれぞれの状態についてもとめる．余剰の期待値 (Good state での余剰の 1/2 プラス Bad state での余剰の 1/2) から投資額 $(14\beta^2+7\sigma^2/144)$ を引いたものをネットの余剰期待値 $E(\beta,\sigma)$ とよぶ．ネットの余剰期待値を最大にするような (β,σ) が効率投資．微分のできる読者は計算せよ．

になる．これを最大化するのは $\beta = 144$ であることがしめせる．(高校レベルの 2 次関数の最大化問題．微分をもちいて計算してもいい．) 再交渉を予想した買い手の投資は $\beta = 144$ になる．

- つまり契約のなかの「128 単位」というのは，買い手に効率レベルの投資をさせるようにうまく選ばれていた (買い手は事後的な交渉力をもたないにもかかわらず)．
- (売り手は事後的に残余請求権?をもつことになるので) 売り手の私的なインセンティブは全体のものと一致する (個人として最大化しようとする関数が，ネットの余剰期待値を表す関数と一致)．よって売り手も効率投資 $\sigma = 144$ をする．
- T_2 で効率的に投資が行われたわけだから，あとは再交渉によって効率レベルの q が状態におうじて実現 (Good state で 180 単位; Bad state で 63 単位)．

コメント:

- 再交渉の可能性があることで，比較的簡単な契約で効率的な結果を達成することができた．
- これは特殊なケースではない．Aghion, Dewatripont, and Rey (199?) や Chung (1991) はリスク中立的なエージェントが 2 人いるケースで，最適な (first-best) 投資が遂行できることをかなり一般的にしめした．
- 問題点 1: 裁判所は 128 単位の取り引きを義務づけることができるという仮定．
- 問題点 2: 契約のなかの 128 単位というのは売り手と買い手が勝手に変えられないという仮定．これは再交渉という考え方に逆行しないか．

10　メカニズム・デザインの問題点と今後の方向

主に Moore [1] のコメントをいくつか列挙する:

- 均衡概念をうまく選べば，どんな選択関数でも遂行できるというのが，メカニズム・デザインのおおよその結論だといえる．メカニズム・デザインの初期の結果 (Hurwicz, Maskin, Gibbard-Satterthwaite) がおおむね否定的であったのと対照的．
- しかし提唱された多くのメカニズムは現実味の薄い仕掛けに訴えていた．それらをあげれば:
  - 整数ゲーム (下の演習参照)
  - 混合戦略の人為的排除と「ルーレット (roulette, modulo game)」(下の演習参照)
  - 有限環境での無限メカニズム
  - 最適反応の不在
  - 弱支配の無限連鎖
  - 均衡外での重いペナルティ．

演習. (整数ゲームの例．直観では 2 人とも大きな整数を選びそうだが，均衡はそうならない例．) 以下の無限ゲームの (純粋戦略による) ナッシュ均衡をすべて求めよ．

		Player 2					
		0	1	2	3	4	$\cdots$
Player 1	0	$1, 1$	$1, -1$	$1, -1$	$1, -1$	$1, -1$	$\cdots$
	1	$-1, 1$	$50, 50$	$0, 100$	$0, 100$	$0, 100$	$\cdots$
	2	$-1, 1$	$100, 0$	$50, 50$	$0, 100$	$0, 100$	$\cdots$
	3	$-1, 1$	$100, 0$	$100, 0$	$50, 50$	$0, 100$	$\cdots$
	4	$-1, 1$	$100, 0$	$100, 0$	$100, 0$	$50, 50$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$

答. ナッシュ均衡は $(0, 0)$ (Player 1 も Player 2 も戦略 0 を選ぶ) だけである．

- Player 2 の戦略 0 にたいする Player 1 の最適反応は戦略 0 だけ．Player 1 の戦略 0 にたいする Player 2 の最適反応は戦略 0 だけ．よって $(0, 0)$ はナッシュ均衡．また，片方のプレーヤーだけが戦略 0 をとるナッシュ均衡は存在しないことも分かる．

– 戦略プロファイル (s,t) で，$s>0, t>0$ となるものがナッシュ均衡となるためには，$s>t$ (Player 2 の戦略 $t>0$ にたいする Player 1 の最適反応を考えよ) かつ $s<t$ (Player 1 の戦略 $s>0$ にたいする Player 2 の最適反応を考えよ) とならなければならない．これはありえない．

演習. (ルーレット・ゲームの例.「混合戦略」を排除するのが不適切な例．利得 1 を 1 万円，利得 100 を 100 万円のこととしたら，自分がどういう戦略をとるか考えてみよう．) 以下のゲームの (純粋戦略による) ナッシュ均衡をすべて求めよ．

		Player 2		
		0	1	2
Player 1	0	$1,1$	$1,-1$	$1,-1$
	1	$-1,1$	$0,100$	$100,0$
	2	$-1,1$	$100,0$	$0,100$

答. 純粋戦略によるナッシュ均衡は $(0,0)$ (Player 1 も Player 2 も戦略 0 を選ぶ) だけである．(ただしそれぞれのプレーヤーが戦略 1 と戦略 2 を 50 パーセントずつの確率で選ぶ混合戦略もナッシュ均衡．)

- 上にあげたような特殊な仕掛けが現実に使われることはあまりない．その理由のひとつは，それらの仕掛けが頑強さ (robustness) に欠けているからか．つまりそれらの働きが環境の細かな違いに左右されやすすぎる．現実では:
  - エージェントの推論過程には欠陥がある．
  - エージェントの選好や知識や状況を特定することには誤りがともなう．
- Moore は，頑強さを待つメカニズムは単純なものであると予想する．
- これまでに提唱されたメカニズムにも，以上の批判のいくつかを免れているものがある．
  - Jackson (??) は “bounded” (「限界のある」?) メカニズムを考えた．ある戦略が弱支配されるときは，それ自身が弱支配されていないような戦略によって弱支配されていなければならないことを要請.
  - Abreu-Matsushima (1994) は “bounded” で，均衡外でのペナルティのごくわずかなメカニズムを提唱．弱支配された戦略を逐次消去していくという均衡概念を採用.

- メカニズム・デザインの応用を考えるにあたって，以下のような疑問が重要になる: 「エージェントはたがいに何を知っているのか?」「彼らはメカニズムを離れて意思疎通できるのか?」「メカニズムをもちいた後に，彼らはどのくらいいっしょにいるのか?」「彼らは共謀できるのか?」「彼らは状態 θ の実現に影響を与えられるのか?」「彼らはどのように思考するのか?」

- 支配戦略による遂行 (あるいは戦略的操作不能な選択関数) では，それぞれのエージェントは他のエージェントの行動や選好を予想する必要がない．この遂行概念はもっとも魅力的なものだろう．一般環境での Gibbard-Satterthwaite の不可能性定理が初期の結果．しかし環境を特定化し，選好を制限したりすると，利用できそうな戦略的操作不能な選択関数が存在することが分かってきた．近年この分野の進展はめざましい．

- 応用上の特定の状況で段階ゲームフォームを考えるペーパーも多い．

- 遂行理論を少数のエージェントのかかわる特定の状況に応用するのは研究としては健全な展開である．人数が 2 人のケースは契約理論との関係で特に重要である．

PART TWO

11　ナッシュ遂行の理論

この節は Moore [1] の Part two, Section 2 の一部にもとづく．Osborne and Rubinstein [2, ch. 10] は厳密でコンパクトなあつかいをしている．

11.1　拡張されたフレームワーク

第 2.3 節にあげた遂行理論の一般的フレームワーク (framework, 枠組み) を拡張する:

- **選択ルール** (choice rule) f とは状態の集合 Θ からアウトカムの集合 A へのコリスポンダンス $f\colon \Theta \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow A$ で，任意の $\theta \in \Theta$ について，$f(\theta)$ が非空 (要素をもつ) となるものである．[11]選択関数は選択ルールの特殊なケースとみなせる．

[11]一般に，**コリスポンダンス** (correspondence, 対応, 多価関数)$\Gamma : X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ とは，X のそれぞれの要素 x にその値として Y の部分集合 $\Gamma(x)$ を関係づけるものである．すなわち関係 $\Gamma \subset X \times Y$ のことを X から Y へのコリスポンダンスであるという．

- **均衡概念** (solution concept) とは，任意のゲームにたいして，戦略プロファイルの集合を対応させるコリスポンダンス．プレーの結果，その集合に属する戦略プロファイル (「均衡」とよばれる）のどれかが実現すると考える．たとえばあるゲームが与えられたとき，その「ナッシュ均衡」といえばそれ自体はある種の戦略プロファイルを指す．そして任意のゲームに対してそれらナッシュ均衡のすべてからなる集合を対応させるルールを考えることができる．そのルールがひとつの均衡概念であり，それは「ナッシュ均衡概念」とでもよぶべきものである．

- 「(特定の) 均衡」と「均衡概念」との関係を説明するために，次のアナロジーを考えよう.「戦略プロファイル ⟨自白，自白⟩」と「ナッシュ均衡」と「ナッシュ均衡概念」との関係は,「東京都」と「首都」と「首都解答プログラム (国名を入力すればその首都が返ってくる)」との関係とおなじである. ⟨自白，自白⟩ は囚人のジレンマのナッシュ均衡であり，東京都は日本の首都である．ナッシュ均衡概念とは任意のゲームにナッシュ均衡の集合を対応させるルールであり，首都解答プログラムは任意の国名にその首都の集合 (稀に首都が２つあったりする) を対応させるルールである．

- アウトカム集合 A へのゲーム・フォームと A 上の選好プロファイルが与えられたとき，ゲームが定義できる．個人 i の選好 $R_i(\theta)$ を効用関数 $u_i(\cdot,\theta): A \to \mathbf{R}$ で表し，ゲームフォーム g のアウトカム $g(s_1,\ldots,s_I)$ をその効用関数で評価すれば利得関数ができる．つまりプレーヤー i の戦略集合を S_i，戦略プロファイル $(s_1\ldots,s_I)$ にたいするプレーヤー i の利得を $u_i(g(s_1,\ldots,s_I),\theta)$ とするゲームができる．[12]

- 均衡概念と状態 θ (したがって選好プロファイル $R(\theta)$) とゲーム・フォーム g が与えられたとする (したがって均衡概念とゲームが与えられている)．**均衡アウトカム** (equilibrium outcome) とは，ある均衡 $s=(s_1,\ldots,s_I)$ にたいして，$x=g(s)$ となるようなアウトカム x のことである．つまり均衡をゲーム・フォーム g で写像して得られるようなアウトカムのこと．

- **遂行問題**: 選択ルール f と均衡概念が与えられたとき，以下の条件をみたすメカニズム g が存在するか?:
  - 状態 θ で g がプレイされたときの均衡アウトカムの**集合**が $f(\theta)$ と一致する．

[12] 厳密に言えば，選好を表す効用関数のなかからどれを選ぶかによって定義されるゲームがちがってくる．純粋戦略のみを考え，通常の均衡概念を採用すれば，これらのゲームの均衡は一致する．

このとき，g は f をその均衡概念で (完全に) 遂行する ((fully) implements) という．[13]

- 完全な遂行では，プランナーは選択ルール $f(\theta)$ の定めるすべてのアウトカムが可能であるように配慮する．たとえば最高の評価額を持つ人にある品物を与えるのが目標のばあい，もし最高の評価額を持つ人が複数いたら，それらのひとびとを差別したくない．たとえば効率性を達成するのが目標のばあい，効率的なアウトカムのいくつかを始めから取り除いたりすることは避けたい．

11.2 ナッシュ遂行のための条件

Maskin (1977) はナッシュ遂行のための条件として，monotonicity と no veto power とを提示した．

ノーテーション．個人 i の選好 R_i が与えられたとき，強い選好 P_i をつぎのように定義する:

$$xP_iy \iff xR_iy \;\&\; \neg yR_ix$$

つまり，u_i を選好 R_i を表す効用関数としたとき，xP_iy というのは，$u(x) > u(y)$ のことであり，i が x を y よりも好むことを表している．

定義．つぎの条件がみたされるとき，選択ルール $f : \Theta \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow A$ は**単調** (monotonic) であるという: $a \in f(\theta)$ で $a \notin f(\theta')$ であるときいつも，あるエージェント i とあるアウトカム $y \in A$ が存在して，$aR_i(\theta)y$ かつ $yP_i(\theta')a$ となる．

- 単調性をみたす選択ルールが状態 θ でアウトカム a を選んでいたのに状態 θ' に変わることで a を選ばなくなったら，ある個人の選好順序で a 以下であったアウトカムのなかに (新しい状態では) a よりも上になるものが存在する．[Figure: two lines each representing preference at a state.]
- **単調性の別表現**．$L_i(a,\theta) := \{b \in A : aR_i(\theta)b\}$ を i が a 以下に好むアウトカムの集合とする．選択ルール f が単調であるする．すると任意の状態 θ, $\theta' \in \Theta$ と任意のアウトカム $a \in f(\theta)$ にたいして，もし $L_i(a,\theta) \subset L_i(a,\theta')$ がすべての i についていえれば，$a \in f(\theta')$ となる．
- (経済理論を学んだ方へのリマーク．) 経済環境 (アウトカムが配分で選好がミクロ経済学で通常仮定される条件をみたす) では「ワルラス対応」

[13]「遂行」といえば，完全な遂行を意味するものとする．完全な遂行以外の遂行概念としては，「状態 θ で g がプレイされたときの均衡アウトカムの集合が $f(\theta)$ の非空な部分集合となる」ことを要求する「弱い遂行 (weak implementation)」がある．

(競争均衡配分の集合を選ぶ) や「リンダール対応」とよばれる選択ルールは単調性をみたす．しかしその他の効率的かつ個人合理性 (初期配分以上の効用をもたらすという条件) をみたす選択ルールの多くは，単調性をみたさない．

演習. パレート効率対応 $f(\theta) := \{a \in A : \neg\exists b \in A\ \forall i\ bP_i(\theta)a\}$ は単調性をみたすか? (f は θ にたいして，パレート効率なアウトカムの集合を対応させる．あるアウトカム a がパレート効率であるとは，全員がそのアウトカムよりも好むようなアウトカム b が存在しないことである．)

命題. 選択ルールが (戦略形ゲームフォームで) ナッシュ遂行可能であれば，単調性をみたす．

証明. ゲームフォーム g が選択ルール $f : \Theta \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow A$ をナッシュ遂行するとする．$a \in f(\theta)$, $a \notin f(\theta')$ とする．すると状態 θ でのナッシュ均衡 s が存在して，$g(s) = a$ となる．しかしこの s は状態 θ' ではナッシュ均衡とはならない．(なれば $a \notin f(\theta')$ に矛盾.) したがって，あるプレーヤー i と戦略 s'_i が存在して，$g(s)R_i(\theta)g(s'_i, s_{-i})$ かつ $g(s'_i, s_{-i})P_i(\theta')g(s)$ となる．$g(s'_i, s_{-i}) = y$ とおけば，$aR_i(\theta)y$ かつ $yP_i(\theta')a$ となっている． ∎

演習. ソロモンの例の選択関数 f を選択ルール ($f(\alpha) = \{a\}$ で $f(\beta) = \{b\}$) とみなす．f は単調性をみたさないことをしめせ．(よって，f はナッシュ遂行可能ではない．) なお 4 つのアウトカムにたいするアンナとベスの選好は以下で与えられていた:

- 状態 α のとき: アンナが $abcd$ の順; ベスが $bcad$ の順.
- 状態 β のとき: アンナが $acbd$ の順; ベスが $bacd$ の順.

答．$a \in f(\alpha)$ で $a \notin f(\beta)$ となっている．しかし $aR_i(\alpha)y$ かつ $yP_i(\beta)a$ となるようなエージェント i とアウトカム $y \in A$ は存在しない．(アンナについては状態 β で a が最高だからこれは起こらない．ベスについては (状態 α に注目すれば) y の候補として d だけが考えられるが，状態 β での選好をみればダメなことがわかる．)

定義. 選択ルール f が no veto power (拒否権の不在; 拒否権というパワーの不在? 拒否権を否定するパワー?) をみたすとは，状態 θ でたかだか 1 人以外の全員が選択肢 a を最高にランクしているときはいつでも (つまり $I-1$ 人以上のエージェント i について，$aR_i(\theta)y$ for all $y \in A$ となるときはいつでも)，$a \in f(\theta)$ となること．

リマーク

- No veto power は veto (拒否権の行使) に No といえる ($I-1$ 人に与えられた) パワー (つまり拒否権を否定するパワー) なのか，veto power (拒否権を行使する (1 人に与えられた) パワー) がないこと (つまり拒否権というパワーの不在) なのか，私は知らない．どちらでも同じことになるはずだけどね．
- 3 人以上のとき典型的には，no veto power は弱い条件 (簡単にみたせる条件) といえる．

定理. (Maskin) エージェントが 3 人以上いるとする．選択ルール f が単調性と no veto power をみたせば，f は (戦略形ゲームフォームで）ナッシュ遂行可能である．

- Moore [1, pp. 225–226] は分配の公平さの観点から，単調性は問題ある条件だと指摘している．その議論はややあやしい．その議論を深く検討することは，卒業研究などの**課題**とする．
- 上の定理の証明としては，じっさいに選択ルールをナッシュ遂行するゲーム・フォームを構築するのが素直なやり方である．しかしこれまでつくられたゲーム・フォームは,「整数ゲーム」やその変形である「ルーレット」と呼ばれるものを使っており，不自然さが残る．
- ナッシュ遂行可能性の必要十分条件としては，Danilov (1992) が提示したものがある．
- 選択関数 (選択ルールで値がいつもひとつのアウトカムからなる集合になるもの）のナッシュ遂行には特殊な困難がつきまとう．
- エージェントが 2 人のケースにも特殊な難しさがともなう．ただし提携による逸脱を排除できれば，このケースは第三者の追加的介在によって解決できると考えてよいかもしれない．

12　再交渉をともなう遂行の理論

この節では第 9 節の再交渉の話をもっと厳密にあつかう．また，再交渉のともなう遂行のための必要十分条件を提示する．この節は Moore [1] の Part two, Section 7 の一部にもとづく．

- メカニズムがプレイされた結果到達するアウトカムがパレート効率になっていないことがある．そのようなとき，エージェントがメカニズムを離れて再交渉し，パレート効率なアウトカムを実現しようとする可能性は大いにある．

- もっと重要なことに，エージェントは再交渉が行われることを見込んで行動するかもしれない．そのときは，メカニズムの均衡戦略も変わってくるはずだ．

「再交渉をするインセンティブがあるばあい，関係者はかならず再交渉する」と仮定したら，遂行問題はどう変わってくるだろうか?

- 選択関数 $f : \Theta \to A$ を考える．任意の $\theta \in \Theta$ にたいして，$f(\theta)$ は θ-効率だとする．(アウトカム a がθ-**効率**，あるいは強い意味で θ-パレート効率，とは以下のようなアウトカム b が存在しないこと: すべての i について $bR_i(\theta)a$ かつある j について $bP_j(\theta)a$．つまり全員が b を a 以上に好み，少なくとも 1 人が b を a より好むようなアウトカム b が存在しないこと．)
- θ-効率である 2 つの異なるアウトカムには，異なる選好プロファイルが対応すると仮定:

  仮定 $R0$**.** 任意の θ と θ-効率な任意のアウトカム $a, b \in A$ について，もし $a \neq b$ ならば，ある i について aP_ib または bP_ia.

  この仮定は「選好の凸性」とよばれる条件を仮定すればみたされる．

- 再交渉で何が起こるかは，ある程度までブラックボックス (中身が分からない) である．しかし状態 θ のとき，アウトカム a からの再交渉の結果実現するアウトカムを $h(a|\theta) \in A$ として，次の 3 つの仮定を置くことにする:

  仮定 $R1$**.** (再交渉は一意的) 任意の $\theta \in \Theta$ について，$h(\cdot|\theta)$ は A から A への関数である．

  仮定 $R2$**.** (再交渉は効率的) 任意の $\theta \in \Theta$ と任意の $a \in A$ について，$h(a|\theta)$ は θ-効率.

  仮定 $R3$**.** (再交渉は個人合理的) 任意のエージェント i と任意の $\theta \in \Theta$ と任意の $a \in A$ について，$h(a|\theta)R_i(\theta)a$.

  - 仮定 $R1$ はかなり強い．この仮定の背後にあるのは，エージェントはたがいに良く知っているという暗黙の前提．そのため，交渉の結果実現するアウトカムを一意的に予想できる．
  - 仮定 $R2$ は理にかなっているといえるだろう．効率性を妨げる通常の原因である情報の偏り (非対称性) は存在しないから．また，実現するアウトカムが非効率だったら，エージェントは交渉をつづけるだろうから．(**課題**: 本当に理にかなっているだろうか? エージェントの権利を尊重したとき，効率性が達成されないことは大いに考えられる．)

– 仮定 $R3$ はもっとも理にかなっている．自分の状態が悪くなるなるような再交渉に参加する義務はだれにもないから．

- **遂行問題**はつぎのようになる: 任意の状態 θ で，合成ゲーム・フォーム $h(\cdot|\theta)\circ g$ の均衡アウトカムが $f(\theta)$ になるようなゲームフォーム g は存在するか?[14] つまり，(少なくともひとつは存在する) 任意の均衡 s について，$h(g(s)|\theta)=f(\theta)$ となるような g が存在しなければならない．もし存在すれば，**g は再交渉 h をともなって f を遂行する** (g implements f with renegotiation h) という．

- h は遂行問題のデータとして，外生的に与えられることに注意．

Maskin and Moore (1987) は再交渉をともなうナッシュ遂行可能性のための条件を提示している．それは前出の (Maskin) 単調性の修正されたものである．ここではひとつの値しかとらない選択ルール，つまり選択関数を考えていることに注意．

定義. 選択関数 $f:\Theta\to A$ と再交渉 $h:A\times\Theta\to A$ を考える．ペア (f,h) が**再交渉単調性** (renegotiation monotonicity) をみたすとは:

1. 任意の状態 $\theta\in\Theta$ について，あるアウトカム $a\in A$ が存在して $h(a|\theta)=f(\theta)$ となる (当然の要求だね); かつ
2. もし $h(a|\theta)=f(\theta)$ で $h(a|\theta')\neq f(\theta')$ ならば，あるエージェント i とあるアウトカム y が存在して，$h(a|\theta)R_i(\theta)h(y|\theta)$ かつ $h(y|\theta')P_i(\theta')h(a|\theta')$ がなりたつ．

- 再交渉単調性をみたす (f,h) が状態 θ でアウトカム $f(\theta)=h(a|\theta)$ を再交渉後に実現していたとする．いま状態 θ' に変わることで再交渉前のアウトカム a から実現される再交渉後アウトカム $h(a|\theta')$ が $f(\theta')$ でなくなったとする．すると，再交渉前のアウトカム y のなかに，再交渉後実現するアウトカム $h(y|\theta)$ が状態 θ ではある個人の選好順序で $h(a|\theta)$ 以下でしかなかったのに，状態 θ' では再交渉後実現するアウトカム $h(y|\theta')$ が同じ個人の選好順序で $h(a|\theta')$ よりも上になるものが存在する．[Figure: a line for θ and another line for θ'; the left is better. Moving up of the outcome (which realizes from y) occurs.]

- 再交渉のないばあい，つまりつねに $h(a|\theta)=a$ となるばあい，について再交渉単調性の定義を適用すると次のようになる:

[14] この合成ゲーム・フォームは $(h(\cdot|\theta)\circ g)(s)=h(g(s)|\theta)$ で定義される．ゲーム・フォーム g のゲームツリーの終節のアウトカム (あるいはゲーム行列の成分になっているアウトカム) a(メカニズム g が定めるアウトカム) を $h(a|\theta)$(再交渉後のアウトカム) で置き換えることによって得られる．

1. 任意の状態 $\theta \in \Theta$ について，あるアウトカム $a \in A$ が存在して $a = f(\theta)$ となる (当然の要求だね); かつ
2. もし $a = f(\theta)$ で $a \neq f(\theta')$ ならば，あるエージェント i とあるアウトカム y が存在して，$aR_i(\theta)y$ かつ $yP_i(\theta')a$ がなりたつ．

つまり選択関数 f の単調性の条件になっている．

定理. (Maskin and Moore, 1987) エージェントが 3 人以上いるとする．選択関数 $f : \Theta \to A$ と再交渉 $h : A \times \Theta \to A$ を考える．任意の状態 $\theta \in \Theta$ について，$f(\theta)$ は θ-効率であるとする．もし f が再交渉 h をともなってナッシュ遂行可能であれば，またそのときにおいてのみ，ペア (f, h) が再交渉単調性をみたす．

- No veto power の条件はなくてよいことに注意.
- エージェントが 2 人のケースについても，再交渉をともなうナッシュ遂行可能性のための必要十分条件が分かっている (Maskin and Moore, 1987)．再交渉のないばあいに比較してシンプルな結果が出ている．

13 Abreu-Matsushima メカニズム

松島 [3, 第 2 節] にもとづく．99 年の夜間主の授業ではカバーできなかった.

松島の解説論文の第 1 節はこのノートであつかった内容の史的背景を概観しており，なぜ Abreu-Matsushima メカニズムのようなメカニズムが出現する必要があったのかを説いている．第 3 節は再交渉のともなう契約設計に簡単に触れている．このノートを理解した人ならこれらの節は自力で読めるだろう．

参考文献

[1] John Moore. Implementation, contracts, and renegotiation in environments with complete information. In Jean-Jacques Laffont, editor, *Advances in Economic Theory: Sixth World Congress, Volume I*, chapter 5, pp. 182–282. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[2] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein. *A Course in Game Theory*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1994.

[3] 松島斉. A-M メカニズム・デザインの合理性. 経済研究 [一橋], Vol. 47, pp. 1–15, 1996.

[4] 丸山雅祥, 成生達彦. 現代のミクロ経済学: 情報とゲームの応用ミクロ. 創文社, 1997.