特別講義: ゲーム理論と政治
期末試験問題冊子
香川大学 経済学部 2002 年度 前期
担当：三原麗珠

注意

a. **解答はマークシートに鉛筆** (HB **がベスト**) **で記入し，マークシートのみを提出すること．**
b. **マークシートの「学籍番号」欄には，最初の** 1 **桁のゼロにつづく** 2 **桁目から学籍番号を記入してマークすること．「講義名」欄には「三原特別講義」と記入すること．**
c. [**設問** 1] **から** [**設問** 21] **のそれぞれについて，もっとも適当と思う正解候補につけられたラベルと同じ数字** (**マーク記号**) **を，マークシート上の対応する設問番号直下の** 1 **から** 0 **の中から選び，マークせよ．**
d. **配点はそれぞれの問題と設問のところに標示している．合計は** 100 **点である．**
e. **分子/分母の形で分数を表すことがある．たとえば** $3/5+1=\frac{3}{5}+1$.
f. **展開形ゲームの情報集合の表し方が武藤のテキストとちがっていることに注意．**
g. **正解は三原の** Web **ページと三原オフィスドアに掲示する予定．**

問題 1 [5 点]. 戦略形ゲーム $(S_1, S_2; u_1, u_2)$ が与えられている．戦略の組 $s=(s_1,s_2)$ がナッシュ均衡であるとは，以下のどの条件をみたすことか [**設問** 1: 5 点]:
(1) $u_1(s_1,s_2) \geq u_1(s_1',s_2)$ for all $s_1' \in S_1$
and $u_2(s_1,s_2) \geq u_2(s_1',s_2)$ for all $s_1' \in S_1$.
(2) $u_1(s_1,s_2) \geq u_1(s_1,s_2')$ for all $s_2' \in S_2$
and $u_2(s_1,s_2) \geq u_2(s_1,s_2')$ for all $s_2' \in S_2$.
(3) $u_1(s_1,s_2) \geq u_1(s_1',s_2)$ for all $s_1' \in S_1$
and $u_2(s_1,s_2) \geq u_2(s_1,s_2')$ for all $s_2' \in S_2$.
(4) $u_1(s_1,s_2) \geq u_1(s_1,s_2')$ for all $s_2' \in S_2$
and $u_2(s_1,s_2) \geq u_2(s_1',s_2)$ for all $s_1' \in S_1$.
(5) $u_1(s_1,s_2') \geq u_1(s_1',s_2')$ for all $s_1' \in S_1$, $s_2' \in S_2$
and $u_2(s_1',s_2) \geq u_2(s_1',s_2')$ for all $s_1' \in S_1$, $s_2' \in S_2$.
(6) $u_1(s_1',s_2) \geq u_1(s_1',s_2')$ for all $s_1' \in S_1$, $s_2' \in S_2$
and $u_2(s_1,s_2') \geq u_2(s_1',s_2')$ for all $s_1' \in S_1$, $s_2' \in S_2$.
(7) $u_1(s_1,s_2) \geq u_1(s_1',s_2')$ for all $s_1' \in S_1$, $s_2' \in S_2$
and $u_2(s_1,s_2) \geq u_2(s_1',s_2')$ for all $s_1' \in S_1$, $s_2' \in S_2$.

問題 2 [15 点]. 図 1 のゲームを考える．

		Player 2		
		l	m	r
	U	$2,1$	$1,2$	$-1,1$
Player 1	M	$2,3$	$3,2$	$0,0$
	D	$1,-1$	$1,-1$	$1,1$

図 1: 問題 2 のゲーム

(i) Player 1 の戦略 U にたいする Player 2 の最適反応を正解候補 (設問 3, 4 と共通) から選べ [**設問** 2: 2 点].
(ii) Player 2 の支配戦略を正解候補から選べ [**設問** 3: 4 点].
(iii) Player 1 の戦略 M が弱支配する戦略 (戦略 M によって弱支配される戦略) をすべてあげよ [**設問** 4: 4 点; すべての正解を選んだばあいのみ得点] .

設問 2–4 正解候補: (1) 戦略 U, (2) 戦略 M, (3) 戦略 D, (4) 戦略 l, (5) 戦略 m, (6) 戦略 r, (7) 存在しない.

(iv) このゲームの純粋戦略によるナッシュ均衡を以下から選べ [**設問** 5: 5 点; 均衡が存在しないばあいは (0) を，存在するばあいはそれらすべてを (1)–(9) から選ぶこと; すべての正解を選んだばあいのみ得点]: (1) (U,l), (2) (U,m), (3) (U,r), (4) (M,l), (5) (M,m), (6) (M,r), (7) (D,l), (8) (D,m), (9) (D,r), (0) 存在しない.

問題 3 [9 点]. 図 2 にあげるゲームを考える．

		Player 2	
		l	r
Player 1	U	$1,2$	$0,0$
	D	$0,0$	$2,1$

図 2: 問題 3 のゲーム

いま，Player 1 の混合戦略を $\mathbf{p}=(p,1-p)$ とし (p は戦略 U を採る確率，$1-p$ は戦略 D を採る確率), Player 2 の混合戦略を $\mathbf{q}=(q,1-q)$ とする (q は戦略 l を採る確率，$1-q$ は戦略 r を採る確率)．このとき純粋戦略でない戦略 ($0<p<1$ かつ $0<q<1$) によるナッシュ均衡 $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ を求め，その均衡における p の値 [**設問** 6: 6 点] と Player 2 の期待利得 $u_2(\mathbf{p},\mathbf{q})$ [**設問** 7: 3 点] とを正解候補から選べ:

設問 6-7 正解候補: (1) 0, (2) 1, (3) 2, (4) 1/2, (5) 3/2, (6) 1/3, (7) 2/3, (8) 4/3, (9) 5/3, (0) 以上の候補以外.

問題 4 [5 点]. 以下の命題 a, b, c の真偽の組 (a の真偽, b の真偽, c の真偽) を正解候補から選べ [**設問** 8: 5 点]:
a. (強) 支配される戦略がナッシュ均衡にふくまれることはない.
b. (強) 支配戦略の組はナッシュ均衡になるとはかぎらない.
c. ある混合戦略が相手のある戦略にたいする最適反応であるとき，その混合戦略にふくまれる純粋戦略 (その混合戦略が正の確率を与える純粋戦略) はどれも，相手のその戦略にたいする最適反応である.

正解候補: (1) 真真真, (2) 真真偽, (3) 真偽真, (4) 真偽偽, (5) 偽真真, (6) 偽真偽, (7) 偽偽真, (8) 偽偽偽.

問題 5 [15 点]. 図 3 にあげる 4 つのゲームを考える．
(i) これらの 4 つのゲームから囚人のジレンマを挙げ，正解候補 (1)–(4) からすべて選べ [**設問** 9: 5 点; すべての正解を選んだばあいのみ得点]．なお，囚人のジレンマではそれぞれのプレーヤーが支配戦略を持っていることに注意.
(ii) 以下のそれぞれの命題 a, b について，もしその命題が偽ならば反例 (その命題が**偽であることをしめす例**) を正解候補 (1)–(4) からすべて選べ．ただし反例があがっていなければ (6) を選べ．もしその命題が真であるならば，正解候補 (5) を選べ．純粋戦略の範囲で考えればよい．命題 a, b で離れた先がナッシュ均衡でもいい.
a. ナッシュ均衡から 1 人のプレーヤーが離れる (戦略を変える) ことによって，そのプレーヤーの利得が改善されることはない [**設問** 10: 5 点; すべての正解を選んだばあいのみ得点].
b. ナッシュ均衡から同時に 2 人が離れる (戦略を変える)

ゲーム 1

	L	R
U	$2,2$	$1,3$
D	$3,1$	$0,0$

ゲーム 2

	L	R
U	$4,4$	$1,6$
D	$6,1$	$2,2$

ゲーム 3

	L	R
U	$2,2$	$0,0$
D	$0,0$	$1,1$

ゲーム 4

	L	R
U	$1,2$	$0,0$
D	$0,0$	$2,1$

図 3: 問題 5 の 4 つのゲーム．プレーヤー 1 は U か D を，プレーヤー 2 は L か R を選ぶ．

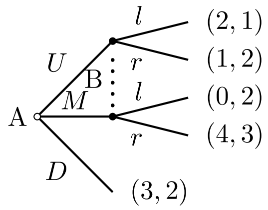

図 5: 問題 7 のゲーム

ことによって，その 2 人の利得が両方とも改善されることはない [**設問** 11: 5 点; すべての正解を選んだばあいのみ得点].

設問 9-11 正解候補: (1) ゲーム 1, (2) ゲーム 2, (3) ゲーム 3, (4) ゲーム 4, (5) 命題が真であるため，反例が存在しない, (6) 命題は偽であるが，これら 4 つのゲームのなかには反例が存在しない．

問題 6 [10 点]. 図 4 の展開形ゲームを考える．ただし U, D はプレーヤー 1 の最初の選択肢，L, R は 2 度目の選択肢で，t, b はプレーヤー 2 の選択肢である．点線で結ばれた 2 点はプレーヤー 1 の情報集合を表し，端点の数字のペアはプレーヤー 1 の利得とプレーヤー 2 の利得をこの順序で記入している．

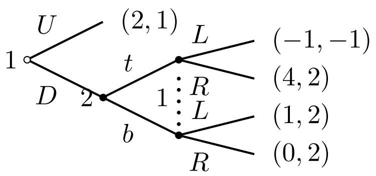

図 4: 問題 6 のゲーム

(i) このゲームに全体ゲーム以外の部分ゲームはいくつあるか [**設問** 12: 3 点]: (1) 1 個, (2) 2 個, (3) 3 個, (4) 4 個, (5) 5 個, (6) 6 個, (7) 7 個, (8) 8 個, (9) 9 個, (0) 0 個.

(ii) このゲームの純粋戦略による部分ゲーム完全均衡を以下からすべて選べ [**設問** 13: 7 点; 均衡が存在しないばあいは (9) を，存在するばあいはそれらすべてを (1)–(8) から選ぶこと; すべての正解を選んだばあいのみ得点]: (1) (UR, t), (2) (UR, b), (3) (UL, t), (4) (UL, b), (5) (DR, t), (6) (DR, b), (7) (DL, t), (8) (DL, b), (9) 存在しない.

問題 7 [9 点]. 図 5 の展開形ゲームを考える．ただし U, M, D はプレーヤー A の選択肢で，l, r はプレーヤー B の選択肢である．また，点線で結ばれた 2 点は B の情報集合を表し，端点の数字のペアは A の利得と B の利得をこの順序で記入している．

(i) プレーヤー B の情報集合における B の信念を $(q, 1-q)$ とする; ただし q は上の点 (A が U を選んだばあい) にいる確率で，$0 \leq q \leq 1$ である．このとき B の最適な選択について正しいものを以下から 1 つ選べ [**設問** 14: 2 点]: (1) q の値にかかわらず l を選ぶのが最適, (2) q の値にかかわらず r を選ぶのが最適, (3) q が 0 よりある値 t $(0 < t < 1)$ より大きければ l を選ぶのが最適で，t より小さければ r を選ぶのが最適, (4) q がある値 t $(0 < t < 1)$ より大きければ r を選ぶのが最適で，t より小さければ l を選ぶのが最適.

(ii) このゲームの完全ベイジアン均衡における戦略の組と B の信念とを以下から選べ [**設問** 15: 7 点; 戦略の組を (1)–(6) から 1 つ，信念を (8)–(0) から 1 つ，合計 2 つを正しく選んだときのみ得点]: (1) (U, l), (2) (U, r), (3) (M, l), (4) (M, r), (5) (D, l), (6) (D, r), (7) 存在しない, (8) $(0, 1)$, (9) $(1, 0)$, (0) 任意の $(q, 1-q)$.

問題 8 [15 点]. 室温が 0 度から 50 度の範囲で自由にコントロールできる，冷暖房完備の部屋の温度設定を考える．この部屋には 5 人のプレーヤーがいて，それぞれが自分にとって最適な室温をこの範囲に持っており，その温度から離れれば離れるほど快適さは下がる (単峰型の効用) とする．各人は自分の快適さを最大化しようとするものとする．各人に自分の最適室温を報告してもらい，それらの温度の中央値 (median) に室温を設定するルールを考える．

(i) 全員がじっさいに本当の最適室温を報告したところ，報告温度が低いほうから $a < b < c < d < e$ となった．このとき室温を c 度に設定することになる．いま c 未満の任意の温度 y (ただし $0 \leq y < c \leq 50$) と c とを多数決投票にかけるとき，c に投票すると**確定的にいえる**のは以下のどのプレーヤーか．[**設問** 16: 5 点; すべての正解を選んだばあいのみ得点]: (1) a を報告したプレーヤー，(2) b を報告したプレーヤー，(3) c を報告したプレーヤー，(4) d を報告したプレーヤー，(5) e を報告したプレーヤー，(6) c に投票することが確定的なプレーヤーは存在しない．

(ii) プレーヤー i の報告する温度を x_i とするとき，$0 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < 50$ をみたすようにプレーヤー 2–5 の戦略が与えられている．プレーヤー 1 の本当の最適室温を p_1 とすると，$p_1 < x_3$ となるとする．プレーヤー 1 が戦略 $x_1 = p_1$ を取ったときに設定される室温を正解候補 (設問 18 と共通) からえらべ [**設問** 17: 4 点].

(iii) 問 (ii) と同じ状況で $x_1' \neq p_1$ という温度を報告する別戦略を考える．最終的に設定される室温は x_1' の値 (ただし $0 \leq x_1' \leq 50$) におうじて決まり，ある範囲内に収まるという．最終的に設定される室温の下限 (最小値) と上限 (最大値) とを正解候補から選べ [**設問** 18: 6 点; 下限と上限のそれぞれ，合計 2 つを正しくマークしたばあいのみ得点]:

設問 17-18 正解候補: (1) x_1, (2) x_1', (3) x_2, (4) x_3, (5) x_4, (6) x_5, (7) 0, (8) 50.

問題 9 [10 点]．3 人の議員からなる議会で，議員報酬の引き上げについて roll-call 方式 (公開で順番に投票; 自分より前に投票した議員の投じた票が分かる) で投票を行う．3 人の議員はいずれも報酬引き上げを望んでいる (引き上げの利益を $b > 0$ とする)．その一方で，もし引き上げに投票すれば，有権者の反感を買うためのコスト c (ただし $b > c > 0$) を被るとする．いま投票する順番にしたがってプレーヤーを 1, 2, 3 と呼び，各プレーヤーは y (yes: 引き上げに賛成) または n (no: 引き上げに反対) のいずれか一方に投票するとする．

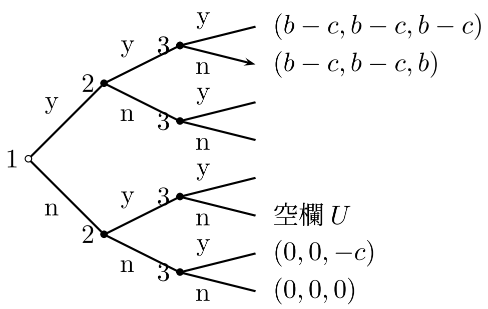

図 6: 問題 9 のゲーム

(i) 図 6 を完成させれば，この状況を展開形ゲームで表現できる．このとき空欄 U に入る利得列を以下から選べ [**設問** 19: 4 点]: (1) $(b-c, b, b-c)$, (2) $(b-c, -c, b-c)$, (3) $(b, b-c, b-c)$, (4) $(-c, b-c, b-c)$, (5) $(-c, 0, 0)$, (6) $(-c, b, b)$, (7) $(0, -c, 0)$, (8) $(b, -c, b)$.

(ii) このゲームの部分ゲーム完全均衡におけるプレーヤー 2 の戦略を以下の正解候補 (1)–(4) から (たとえば ny は上の情報集合で n を，下の情報集合で y を選ぶ戦略)，プレーヤー 2 の利得を (5)–(8) から選べ [**設問** 20: 6 点; 合計 2 つの正解を正しく選んだばあいのみ得点]: (1) yy, (2) yn, (3) ny, (4) nn, (5) b, (6) $b-c$, (7) 0, (8) $-c$.

問題 10 [7 点]．3 人の投票者 (プレーヤー 1, 2, 3) が，選択肢 x, y, z からひとつ選ぼうとしている．3 人の選好は以下で表される: プレーヤー 1 が xyz (x, y, z の順で好ましい)，プレーヤー 2 が yzx，プレーヤー 3 が zxy．いま次のようなアジェンダ (選択肢を比較する順序を定めた手続き) により多数決投票を行う: まず第一段階で x と y とで投票し，つぎに第二段階でその勝者と z とで投票して最終アウトカム (結果) を決める．戦略的投票 (sophisticated voting) によるアウトカムを以下の正解候補 (1)-(3) から，そのとき第一段階で y に投票するプレーヤーを (4)–(6) からすべて選べ．投票の木を書いて考えるといいだろう [**設問** 21: 7 点; すべての正解を選んだばあいのみ得点; y に投票するプレーヤーは 1 人とはかぎらない]: (1) x, (2) y, (3) z, (4) プレーヤー 1, (5) プレーヤー 2, (6) プレーヤー 3.